k-uplet (ou k-liste) d'un ensemble fini

Définition : Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide. Un k-uplet (ou k-liste) d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments pris dans l'ensemble E.

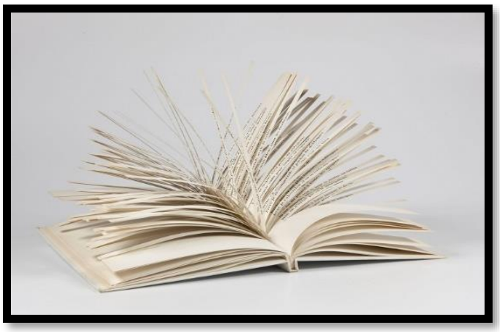
Propriété : Soient n et k deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments de E est n^k c'est-à-dire $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ fois}}$.

Situation 1

Un questionnaire à choix multiples à choix multiple autorisant une seule réponse par question comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose quatre réponses possibles. Combien y a-t-il de façons de répondre à ce QCM ?

Situation 2

En 1961 Raymond Queneau écrit une œuvre majeure de la littérature combinatoire intitulé « Cent mille milliards de poèmes ». L'ouvrage est constitué de 10 pages découpées horizontalement. Chaque page est formée de 14 bandes de papier contenant chacune un vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages, le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au 14e vers. Sauriez-vous justifier le titre de l'ouvrage ?



Situation 3

En informatique on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou 1. Un octet est composé de 8 bits. Combien de caractères un octet peut-il coder ?

D'autres situations du même type

On appelle phrase musicale un ensemble ordonné de quatre notes. Combien de phrases musicales différentes peut-on réaliser avec les notes « Do », « Ré », « Mi », « Fa », « Sol », « La » et « Si » ? Pour aller à son travail Léo rencontre sur son trajet sept feux tricolores. Un trajet étant une succession de couleurs des feux, combien de trajets différents Léo peut-il faire pour se rendre à son travail ? On joue dix fois à « Pile » ou « Face ». Quel est le nombre de résultats possibles ? Dans un questionnaire on doit répondre par « Oui » ou « Non » à chacune des dix questions posées. Quel est le nombre de réponses possibles pour l'ensemble du questionnaire ?

k-uplet (ou k-liste) d'éléments distincts d'un ensemble fini

Propriété : Soit n un entier naturel et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$.

Définition : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on appelle « factorielle n » le produit de tous les entiers naturels de 1 à n, c'est-à-dire le nombre $n!$ défini par $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Propriété : Le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n peut se calculer comme le quotient de deux factorielles $\frac{n!}{(n-k)!}$. Propriété à démontrer…

Situation 1

On considère les chiffres $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$.
Avec ces trois chiffres, combien peut-on former de nombres de deux chiffres, tous différents ?

On considère les lettres $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, $\boxed{d}$.
Avec ces quatre lettres, combien peut-on former de « mots » de trois lettres, toutes différentes ?

On considère les chiffres $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$.
Avec ces dix chiffres, combien peut-on former de nombres de quatre chiffres, tous différents ?

On considère toutes les lettres de l'alphabet : $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, … , $\boxed{z}$.
Avec ces 26 lettres, combien peut-on former de « mots » de cinq lettres, toutes différentes ?

Situation 2

Une association doit élire les trois membres de son bureau : « Président », « Secrétaire » et « Trésorier » parmi sept candidats. Sachant qu'une même personne ne peut, ni cumuler tous les postes, ni même cumuler deux postes, combien de bureaux différents peuvent être élus ?

Situation 3

Dans une pièce de théâtre, il y a six rôles à pourvoir, qui peuvent être joués par n'importe lesquelles des douze personnes de la troupe. Combien de distribution des rôles peut-on avoir ?

Situation 4

Une compétition de jeux vidéo en ligne oppose six joueurs. A la fin, un classement est établi et il n'y a pas d'ex aequo. Le meilleur joueur reçoit une médaille d'or, le deuxième une médaille d'argent et le troisième une médaille de bronze. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Situation 5

Dans une compétition sportive, on attribue une médaille d'or, une médaille d'argent et une médaille de bronze aux trois premiers arrivés. Sachant qu'au départ nous avons 35 athlètes, combien de distributions possibles de médailles y a-t-il ?

Permutations

Définition : On appelle permutation d'un ensemble E à n éléments tout n-uplet d'éléments distincts de E.

Propriété : Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre $n!$ qui se lit « factorielle n » et est défini par $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Situation 1

On considère les chiffres $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$.
Avec ces trois chiffres, combien peut-on former de nombres de trois chiffres, tous différents ?

On considère les lettres $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, $\boxed{d}$.
Avec ces quatre lettres, combien peut-on former de « mots » de quatre lettres, toutes différentes ?

On considère les chiffres $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$.
Avec ces dix chiffres, combien peut-on former de nombres de dix chiffres, tous différents ?

On considère toutes les lettres de l'alphabet : $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, … , $\boxed{z}$.
Avec ces 26 lettres, combien peut-on former de « mots » de 26 lettres, toutes différentes ?

Situation 2

Cinq élèves se mettent en rang devant leur professeur. Combien de manières y a-t-il de les disposer les uns derrière les autres ?

Situation 3

Monsieur Jourdain : Non, vous dis-je, je ne veux que ces seules paroles-là dans le billet ; mais bien tournées à la mode ; bien tournées comme il faut. Je vous prie de me dire un peu, pour voir, les diverses manières dont on les peut mettre. *Le maitre de philosophie :* On les peut mettre premièrement comme vous avez dit : Belle marquise, vos beaux yeux me font mourir d'amour. Ou bien : D'amour mourir me font, belle marquise, vos beaux yeux. Ou bien : vos beaux yeux d'amour me font, belle marquise, mourir. Ou bien : Mourir vos beaux yeux, belle marquise, d'amour me font. *Le Bourgeois gentilhomme, Molière, 1670.* De manière théorique, combien de phrases Monsieur Jourdain peut-il composer avec les 5 morceaux de phrase « belle marquise », « vos beaux yeux », « me font », « mourir », « d'amour ».

D'autres situations du même type

Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) écrit en modifiant l'ordre des lettres du mot d'origine. Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec le mot « facteurs ». Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec le mot « factorielle ». Attention au piège…

Marion a révélé que le mot de passe de son compte Gmail est composé de toutes les lettres de son prénom. Combien cela donne-t-il de possibilités ? Isabelle a révélé que le mot de passe de son compte Gmail est composé de toutes les lettres de son prénom. Combien cela donne-t-il de possibilités ? Attention au piège…

Vers la notion de combinaisons

Partie A – Quand l'ordre intervient

On considère un groupe de cinq personnes inscrites dans une compétition.
Ces cinq personnes seront notées $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, $\boxed{d}$, $\boxed{e}$ participent à une course.

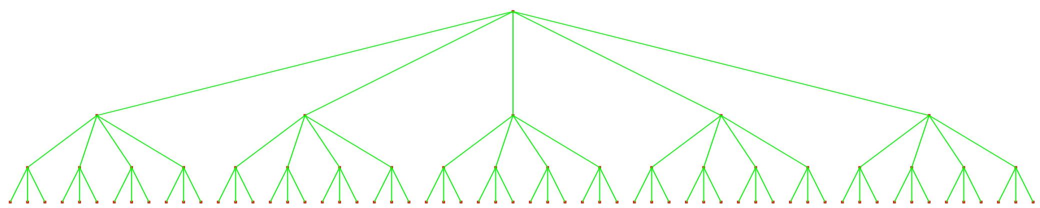
- Dénombrer tous les classements possibles à l'arrivée.

- Ces cinq personnes s'affrontent pour trois médailles (Or, argent, bronze).
  Dénombrer tous les podiums possibles.

Partie B – Quand l'ordre n'intervient plus

On souhaite désormais faire une équipe de trois personnes parmi les cinq compétiteurs.

- Combien d'équipes peut-on alors former ? On pourra à l'aide de l'arbre ci-dessous en comptabilisant, parmi les podiums possibles, les équipes identiques…



- Ecrire le nombre d'équipes que l'on peut former à l'aide de trois factorielles.

Partie C – Définition, notation et propriété

Définition : Soit n un entier naturel, k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n. Une **combinaison** de k éléments de E choisis parmi les n éléments de E est **une partie de E** contenant k éléments pris parmi les n.

Une « équipe » est une combinaison de trois personnes prises parmi les cinq compétiteurs.

Il est important de comprendre que deux combinaisons ne diffèrent que par les éléments qu'elle contient et non par l'ordre dans lequel sont rangés ces éléments.

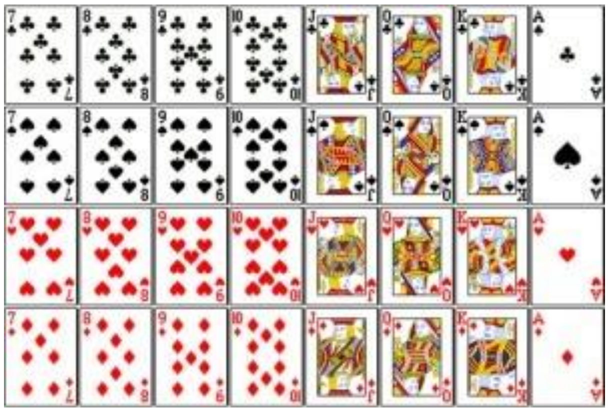
Les « podiums » $(a;b;c)$, $(a;c;b)$, $(b;a;c)$, $(b;c;a)$, $(c;a;b)$, $(c;b;a)$ qui sont des triplets d'éléments distincts correspondent à la même « équipe » $\{a;b;c\}$ appelée combinaison de trois éléments. On notera que le cardinal des triplets d'éléments distincts est supérieur au cardinal des combinaisons de trois éléments dans une proportion correspondant au nombre de permutations de trois éléments. D'où la propriété suivante.

Propriété : Soit n un entier naturel, k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$. Le **nombre de combinaisons** de k éléments choisis parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et vaut $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exercices d'application directe

Le poker est un jeu dans lequel on distribue au joueur cinq cartes prises dans un jeu de 32 cartes. Sachant qu'une « main » est l'ensemble des cinq cartes distribuées, déterminer le nombre de « mains » possibles.

On propose ci-contre la composition d'un jeu de 32 cartes. Combien de « mains » de cinq cartes contiennent-elles l'as de pique ?



En France, avant 2008, le loto (ancienne version) est un jeu dans lequel on coche six numéros distincts parmi les entiers compris entre 1 et 49. Sachant que pour ce jeu, l'ordre dans lequel sont tirés les numéros n'intervient pas, déterminer le nombre de tirages possibles.

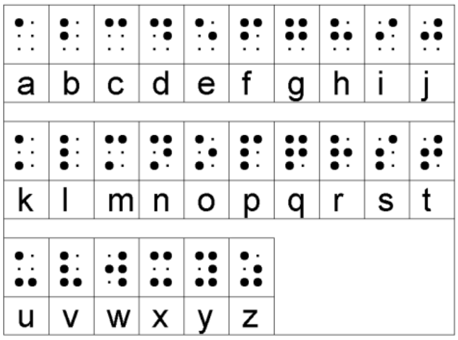
En France, depuis 2008, le loto (nouvelle version) est un jeu dans lequel on coche cinq numéros distincts parmi les entiers compris entre 1 et 49 puis un numéro chance choisi parmi les entiers compris entre 1 et 10. Déterminer le nombre de tirage possible.

Neuf amis souhaitent constituer une équipe de volley-ball de plage de quatre joueurs. Combien d'équipes peuvent-ils constituer ? Parmi les neuf amis, Hector ne souhaite pas participer. Combien d'équipes peuvent-ils constituer sans Hector ? De plus on apprend que Nadia souhaite absolument participer. Combien d'équipes peuvent-ils constituer avec Nadia (et sans Hector) ?

On cherche à constituer un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes. Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ? Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ? Combien y en a-t-il comportant que des personnes du même sexe ? Combien y en a-t-il comportant au moins un homme et une femme ?

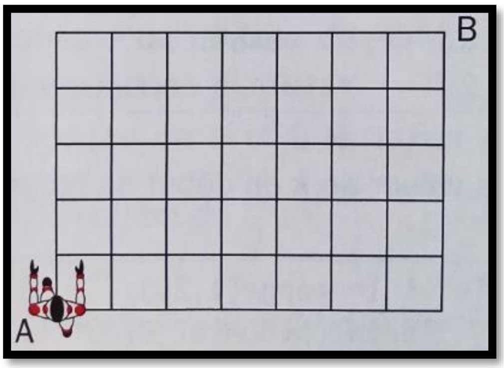
Les symboles de l'alphabet braille sont matérialisés par des points en relief situés sur une matrice de six points possibles comme le montrent les figures ci-contre.

Combien de symboles différents possédant au moins un point peut-on réaliser selon ce principe ? Combien de symboles possédant de un à quatre points peut-on réaliser ?



Un robot placé en A doit se rendre en B. Il suit les lignes verticales et horizontales du quadrillage et ne peut se déplacer que « vers la droite » ou « vers le haut ». Combien de chemins différents peut-il emprunter ?

Quelqu'un affirme que les quantités $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ sont égales. Qu'en pensez-vous ?



Parties d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble. Dire que F est une partie de E (ou que F est un sous-ensemble de E ou encore que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E. On note alors : $F \subset E$.

Propriété : Soit n un entier naturel. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}$ c'est-à-dire 2^n.

Preuve : Déterminer une partie F d'un ensemble E, c'est déterminer pour chaque élément de E s'il appartient à F ou pas. Il y a, pour chaque élément de E deux possibilités : appartenir ou ne pas appartenir à F. Si on note n le nombre d'éléments de E cela donne 2^n choix possibles et donc 2^n parties de E. En notant pour chaque élément de E « 1 » son appartenance à F et « 0 » sa non appartenance à F, on retrouve l'idée que considérer une partie de E revient à considérer un n-uplet de l'ensemble $\{0;1\}$. Et nous savons que le nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}$ est 2^n.

Situation 1

On considère l'ensemble $E=\{a;b;c\}$. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E. Combien y en a-t-il ? Quelle formule peut-on ainsi vérifier ?

Situation 2

On considère l'ensemble $E=\{p;q;r;s\}$. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E. Combien y en a-t-il ? Quelle formule peut-on ainsi vérifier ?

Situation 3

Si vous avez le courage : on considère l'ensemble $E=\{u;v;x;y;z\}$. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E. Combien y en a-t-il ? Quelle formule peut-on ainsi vérifier ?

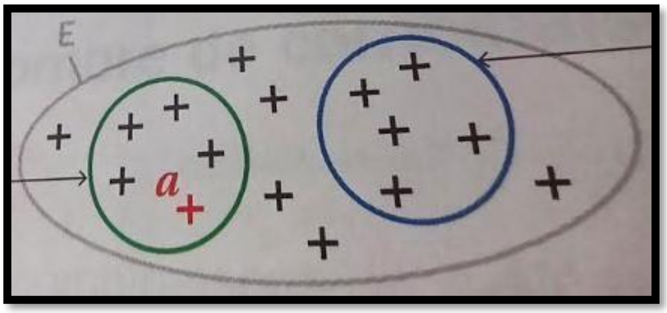
Situation 4

Combien y a-t-il de parties à deux éléments dans un ensemble qui en contient trois ? Combien y a-t-il de parties à deux éléments dans un ensemble qui en contient quatre ? Combien y a-t-il de partes à trois éléments dans un ensemble qui en contient quatre ? Combien y a-t-il de parties à deux éléments dans un ensemble qui en contient cinq ? Combien y a-t-il de parties à trois éléments dans un ensemble qui en contient cinq ? Combien y a-t-il de partes à quatre éléments dans un ensemble qui en contient cinq ?

Remarque

Il est fondamental de comprendre le lien direct qui existe entre « parties » et « combinaisons ». Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$, une combinaison de k éléments d'un ensemble E qui en contient n est une partie (ou un sous-ensemble) à k éléments de cet ensemble E. Et le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n est égal au nombre de parties (ou de sous-ensemble) à k éléments de cet ensemble E.

Relation de Pascal



Propriété : Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$ on a l'égalité :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Preuve ensembliste

Soit $E = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ un ensemble à n éléments. On fixe un élément a de l'ensemble E. Parmi les parties de l'ensemble E de cardinal k (c'est-à-dire partie de E ayant k éléments) nous distinguons celles qui contiennent l'élément a et celles qui ne contiennent pas l'élément a.

- Le nombre de parties à k éléments de l'ensemble E est égal à $\binom{n}{k}$.
- Le nombre de parties qui contiennent l'élément a est égal à $\binom{n-1}{k-1}$ puisque cela revient à choisir (en plus de a) $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de E privé de a.
- Le nombre de parties qui ne contiennent pas l'élément a est égal à $\binom{n-1}{k}$ puisque cela revient à choisir k éléments parmi les $n-1$ éléments de E privé de a.

Nous pouvons affirmer que le nombre de parties à k éléments de l'ensemble E est égal à la somme des parties qui contiennent l'élément a et des parties qui ne contiennent pas l'élément a.

Nous obtenons donc l'égalité suivante : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Preuve algébrique

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{(n-k) \times k!(n-k-1)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Le triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Recopier et compléter le tableau suivant :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	?	1						
$n=3$	1	?	?	1					
$n=4$	1	?	?	?	1				
$n=5$	1	?	?	?	?	1			
$n=6$	1	?	?	?	?	?	1		
$n=7$	1	?	?	?	?	?	?	1	
$n=8$	1	?	?	?	?	?	?	?	1

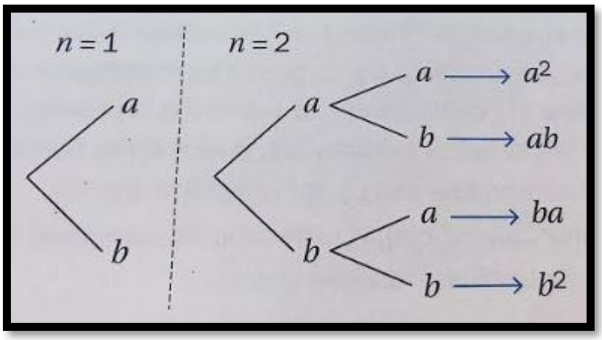
Que peut-on dire de la somme des coefficients d'une même ligne ? Pourquoi ?

Que peut-on dire de la quantité $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$? Pourquoi ?

Vers la formule du binôme de Newton

Soient a et b deux nombres réels. Développer $(a+b)^2$. Développer $(a+b)^3$. Développer $(a+b)^4$. Conjecturer le développement de $(a+b)^5$, de $(a+b)^6$, de $(a+b)^7$ et de $(a+b)^8$.

On modélise le développement de $(a+b)^n$ à l'aide d'un arbre associant chaque terme du développement à un chemin de l'arbre proposé ci-contre. Réaliser un arbre pour $n=3$ et pour $n=4$.



Dans le développement de $(a+b)^n$ on obtient une somme de « monômes » $a^k b^{n-k}$.

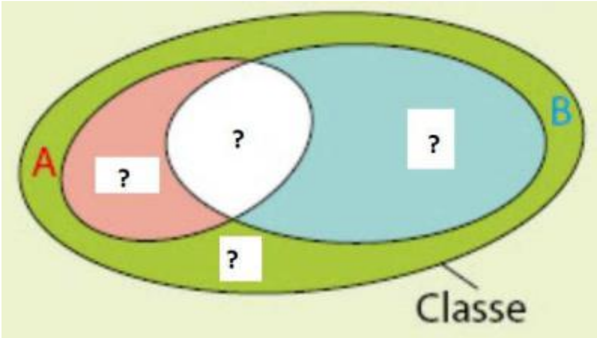
Déterminer en fonction k et de n le nombre de monômes $a^k b^{n-k}$ contenus dans le développement de $(a+b)^n$ et en déduire la formule de Newton.

Réunions, intersections et produits cartésiens

La carte un restaurant propose cinq entrées différentes et trois plats. Paula ne souhaitant pas prendre les deux hésite entre une entrée et un plat. Combien a-t-elle de choix possibles ?

Dans le même restaurant, la carte propose également deux desserts. Jules décide de choisir le menu « entrée, plat et dessert ». Combien de menus différents Jules peut-il composer ?

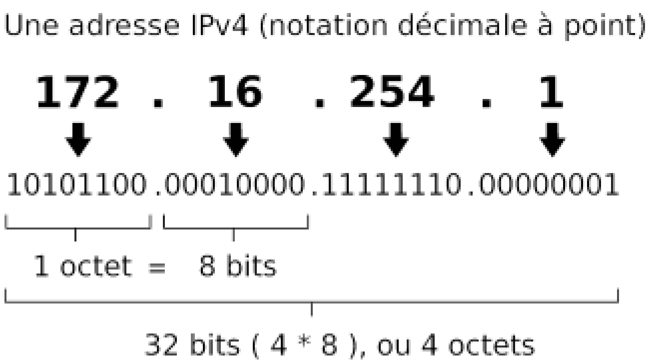
Dans une classe de 25 élèves, 15 s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 à l'atelier musique au 4 à ces deux ateliers. Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre, ni à l'atelier musique ?



Dans une classe de 35 élèves, 20 étudient l'allemand, 15 étudient l'espagnol et 8 aucune de ces deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

Au cours d'un match de football opposant deux équipes de 11 joueurs, chaque équipe élit un capitaine. Kylian affirme qu'il y a 22 binômes de capitaines possibles. Qu'en pensez-vous ?

Une adresse IP (avec IP pour Internet Protocol) est un numéro d'identification qui est attribué de façon permanente ou provisoire à chaque périphérique relié à un réseau informatique qui utilise l'Internet Protocol. Il existe des adresses IP de version 4 (IPv4) constituées de 32 bits (4 octets), et de version 6 (IPv6) sur 128 bits (16 octets).



La version 4 est actuellement la plus utilisée : elle est généralement représentée en notation décimale avec quatre nombres compris entre 0 et 255, séparés par des points (voir ci-dessus). Avec une adresse IPv4, peut-on identifier cinq milliards d'ordinateurs ?

L'IPV6 est constituée de 128 bits (16 octets) et est représentée en écriture hexadécimale, où les 8 groupes de 2 octets (16 bits par groupe donc de 0000 à ffff) sont séparés par le signe deux-points. Par exemple : **2001 : db8 : 1 : 85a3 : ab : 2ab : ac1f : 8001**. Combien d'adresses IPv6 existe-t-il ?

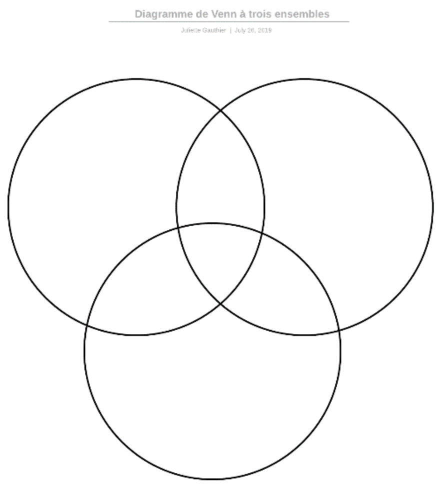
Cardinal d'un ensemble, notations et formules

On note A et B deux ensembles finis. Le nombre n d'éléments de A est appelé cardinal de A et est noté $\text{Card}(A)$. Le nombre p d'éléments de B est appelé cardinal de B et est noté $\text{Card}(B)$. Comment obtient-on le cardinal de la réunion des deux ensembles A et B ? Comment obtient-on le cardinal du produit cartésien des deux ensembles A et B ?

On note $C=\{a;b;c;d;e\}$ un ensemble à cinq éléments et $D=\{\alpha;\beta;\theta\}$ un ensemble à trois éléments. Déterminer le nombre d'éléments de $C\cup D$ puis le nombre d'éléments de $C\times D$.

On note $E=\{m;n;o;p;q\}$ un ensemble à cinq éléments et $F=\{p;q;\pi\}$ un ensemble à trois éléments. Déterminer le nombre d'éléments de $E\cup F$ puis le nombre d'éléments de $E\times F$.

Un centre périscolaire propose trois activités aux jeunes qui le fréquentent : aide aux devoirs, arts visuels et musique, chaque inscrit devant choisir au moins une activité. On sait que 45 inscrits demandent au moins de l'aide aux devoirs, 66 font au moins de la musique et 72 au moins des arts visuels. On sait aussi que 6 jeunes sont inscrits aux arts visuels et à l'aide aux devoirs, 21 aux arts visuels et à la musique, 12 à l'aide aux devoirs et à la musique. On sait également que 15 jeunes sont inscrits aux trois options simultanément.



Recopier et compléter le diagramme et en déduire le nombre total d'inscrits dans ce centre.

On note M la spécialité Mathématiques, SP la spécialité Sciences Physiques et SVT la spécialité Sciences et Vie de la Terre. Les 36 élèves d'une classe de première choisissent leurs spécialités : 13 ont choisi M, 12 SP et 10 SVT. Par ailleurs, 6 ont choisi M et SP, 2 M et SVT et 3 SP et SVT. Enfin 2 ont pris ces 3 spécialités. Combien d'élèves n'ont pris aucune de ces 3 spécialités ?

Que pensez-vous de l'égalité proposée ci-dessous ? Sauriez-vous la démontrer ?

$$\begin{aligned}&\mathrm{Card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)\\&-\mathrm{Card}(A\cap B)-\mathrm{Card}(B\cap C)-\mathrm{Card}(C\cap A)+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

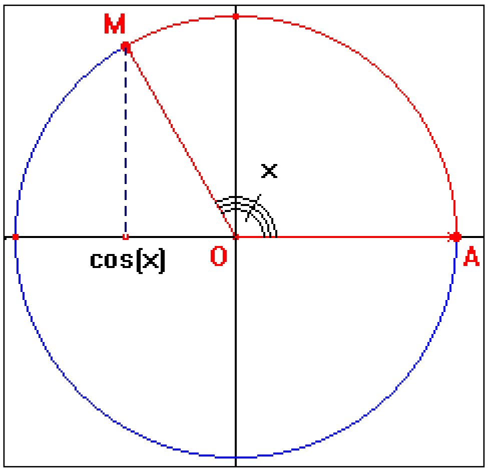
Un club de vacances propose trois activités durant la semaine : randonnée, canoë et VTT. Parmi les 180 vacanciers, 70 se sont inscrits à la randonnée, 80 au canoë et 60 au VTT. Chaque vacancier peut choisir de faire de 0 à 3 activités durant ses vacances. Combien de programmes différents un vacancier peut-il construire ? Pourquoi peut-on affirmer que certains vacanciers se sont inscrits à plusieurs activités ? Pour résumer la situation, les organisateurs décident de consigner les informations dans un diagramme de Venn. On peut y lire que :

- 17 personnes sont inscrites au VTT et au canoë mais pas à la randonnée,
- 25 personnes sont inscrites au canoë et à la randonnée mais pas au VTT,
- Personne n'est inscrit à la fois à la randonnée et au VTT.

Combien de personnes ne sont inscrites à aucune activité ?

A la fin des vacances, des prix sont décernés pour chacune des activités. Pour chacune d'elle, l'organisation du club désigne le meilleur vacancier et lui offre une récompense. On forme ainsi un triplet de vacanciers récompensés. En supposant qu'un vacancier peut être récompensé pour plusieurs disciplines différentes, combien de triplets de récompensés peut-on former ?

Vers la fonction cosinus



C est un cercle trigonométrique de centre O. A tout nombre réel x correspond un unique point M du cercle C. Le nombre x est une mesure en radian de l'angle AOM .

Définition

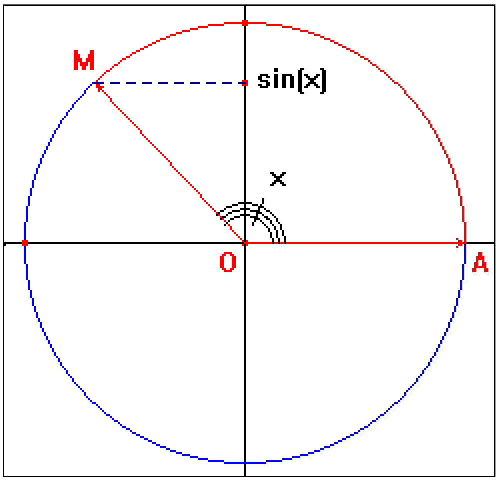
$\cos(x)$ est **l'abscisse** de M

Tableau de valeurs

Compléter le tableau de valeurs suivant en indiquant dans la seconde ligne la valeur du cosinus.

$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Vers la fonction sinus



C est un cercle trigonométrique de centre O. A tout nombre réel x correspond un unique point M du cercle C. Le nombre x est une mesure en radian de l'angle AOM .

Définition

$\sin(x)$ est **l'ordonnée** de M

Tableau de valeurs

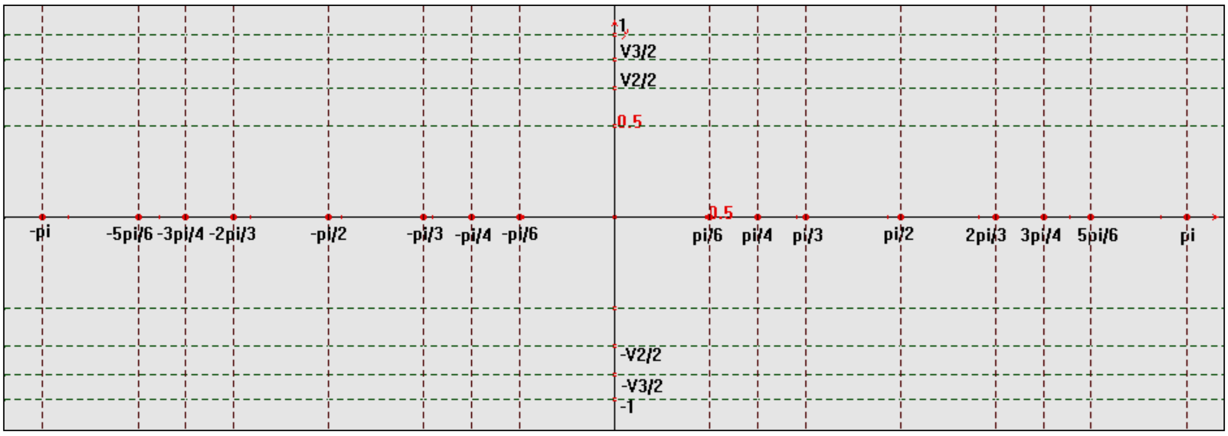
Compléter le tableau de valeurs suivant en indiquant dans la seconde ligne la valeur du sinus.

$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Rappel de deux encadrements et d'une égalité

Proposer un encadrement de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ par deux nombres réels, proposer une égalité reliant les deux fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$, rappeler quelle est la période de ces deux fonctions.

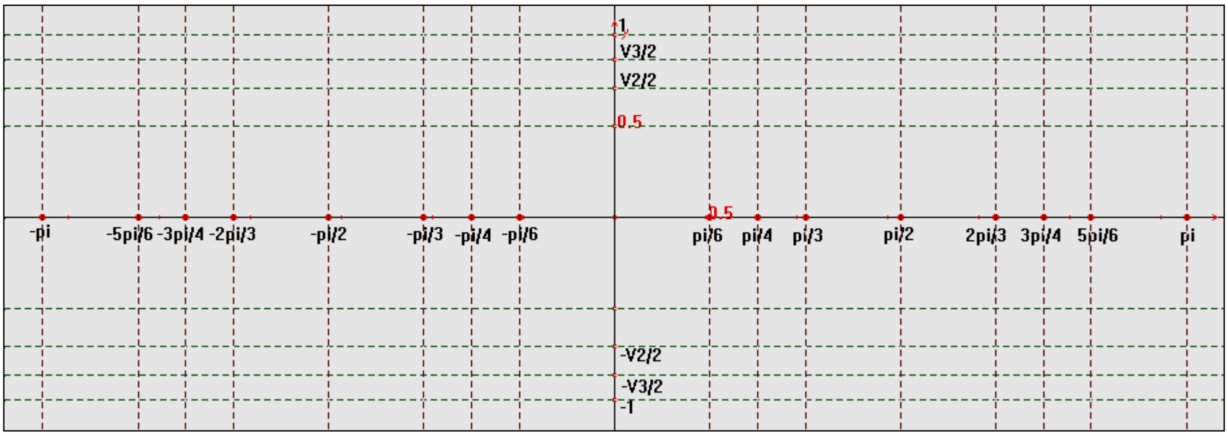
La fonction cosinus



1. Tracer la courbe représentative du cosinus. Que savez-vous en dire ?

2. Etablir le tableau de variations et le tableau de signes du cosinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

La fonction sinus



3. Tracer la courbe représentative du cosinus. Que savez-vous en dire ?

4. Etablir le tableau de variations et le tableau de signes du sinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Lien entre les deux fonctions trigonométriques

5. Mettre en relation le tableau de signe de la fonction cosinus avec le tableau de variation de la fonction sinus.

6. Mettre en relation le tableau de signe de la fonction sinus avec le tableau de variation de la fonction cosinus.

7. Qu'en déduisez-vous ? Soyez précis dans votre réponse.

Etablir des inégalités à l'aide de l'étude des fonctions

On souhaite établir les quatre inégalités suivantes lorsque $x \in [0;\pi]$:

$$\sin(x) \leq x \qquad 1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \qquad x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \qquad \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Première inégalité

On considère la fonction $f(x)=\sin(x)-x$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
2. Etablir l'inégalité $\sin(x) \leq x$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Deuxième inégalité

On considère la fonction $g(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

3. Calculer $g'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
4. Etablir l'inégalité $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Troisième inégalité

On considère la fonction $h(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

5. Calculer $h'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
6. Etablir l'inégalité $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Quatrième inégalité

On considère la fonction $k(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

7. Calculer $k'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
8. Etablir l'inégalité $\cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

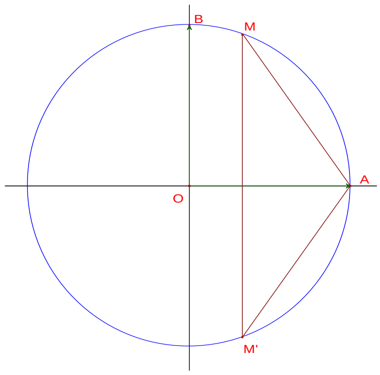
Encadrement

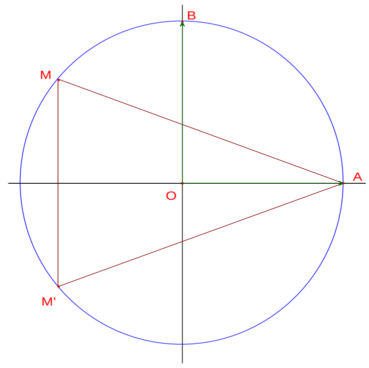
9. En déduire un encadrement de $\sin(x)$ par deux polynômes sur l'intervalle $[0;\pi]$.
10. En déduire un encadrement de $\cos(x)$ par deux polynômes sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Optimisation d'une aire

Situation 1

Soit C le cercle trigonométrique et A un point du cercle. On se propose d'étudier les aires des triangles isocèles de sommet A inscrits dans le cercle C. On choisit le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$.





Un triangle AMM' inscrit dans le cercle C se présentera alors comme la figure ci-dessous (on choisit pour M l'ordonnée positive). Désignons par α la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable α ? Montrer que l'aire du triangle AMM' s'exprime en fonction de α par l'expression suivante : $A(\alpha)=(1-\cos\alpha)\sin\alpha$.

Montrer que $A'(\alpha)=-2(\cos\alpha-1)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$. Etudier la fonction A sur l'intervalle $[0;\pi]$. Pour quelle valeur de α l'aire du triangle AMM' est-elle maximale ? Quelle est son aire ?

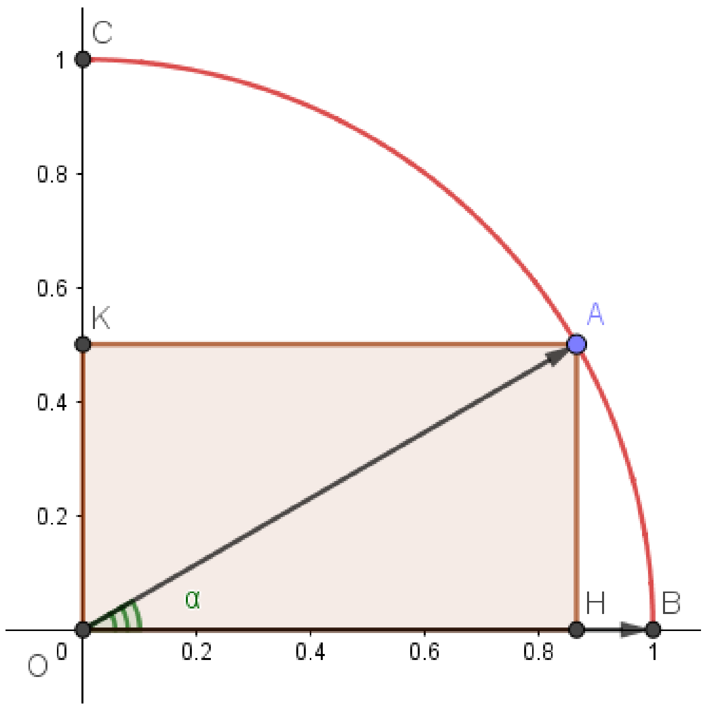
Situation 2

On considère le point A situé sur le quart supérieur droit du cercle trigonométrique (cercle de centre O origine du repère et de rayon 1).

On note H le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et K le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

On note α l'angle entre l'axe des abscisses et le demi droite (OA)

On s'intéresse à l'aire du rectangle OHAK et on souhaite trouver la position de A sur le quart de cercle pour laquelle cette aire sera maximale. On notera $A(\alpha)$ l'aire du rectangle en fonction de α.



Montrer que $A(\alpha)=\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)$. En déduire $A'(\alpha)=1-2\cos^2(\alpha)$. Etudier les variations de A sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour quelle valeur de α l'aire est-elle minimale ? Quelle est cette aire ?