Notion de cardinal d'un ensemble fini

Déterminer le cardinal d'un ensemble fini

- Le nombre n d'éléments d'un ensemble E est noté **Card(E)**.
- $\text{Card}(\varnothing) = 0$.
- **Principe additif.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :
$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_p)$$
- Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ est l'ensemble de tous les k-uplets $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$, avec $x_i \in E_i$.
- **Principe multiplicatif.** Si les ensembles E_i sont finis, alors :
$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)$$

Notion de k-uplets d'un ensemble fini

Modéliser à l'aide de k-uplets d'un ensemble E

- Un **k-uplet** $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$ de **E** avec tous les $x_i \in E$ est un élément de l'ensemble :
$E^k = E \times \ldots \times E$ (k facteurs).
Par exemple, $(a ; b ; c ; a ; c ; a)$ et $(b ; a ; c ; a ; c ; a)$ sont deux 6-uplets distincts de $E = \{a ; b ; c\}$
- Le nombre de k-uplets d'un ensemble E à n éléments est :
$n^k = \text{Card}(E^k)$.

Modéliser à l'aide de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments

- Un **k-uplet d'éléments deux à deux distincts** de E est $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$ avec tous les $x_i \in E$ et $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_k$.
- Le **nombre de k-uplets** de E deux à deux **distincts** est :
$n(n-1) \ldots (n-k+1)$ (k facteurs).
- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.
- Le **nombre de permutations** d'un ensemble non vide à n éléments est :
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Notion de combinaisons et triangle de Pascal

Modéliser à l'aide de combinaisons

- F est une **partie** de E signifie que tous les éléments de F sont éléments de E. On note **F ⊂ E**.
- Le **nombre de parties** d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.
- Une **combinaison** de k éléments parmi les n éléments de E est une partie de E ayant k éléments.
- Le **nombre de combinaisons** de k éléments parmi n éléments est :
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

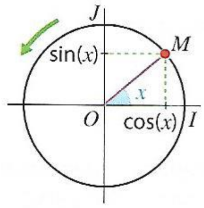
Triangle de Pascal

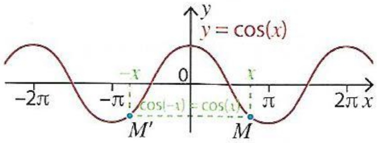
n \ k	0	1	2	3	4	…
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$		1		
4	1	4	$= \binom{n}{k}$	4	1	
…						

Les fonctions cosinus et sinus

Connaître les fonctions cosinus et sinus

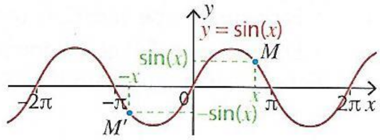
- La fonction **cosinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Elle est paire et périodique de période 2π.
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
- Pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$.





- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

- La fonction **sinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Elle est impaire et périodique de période 2π.
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$.



- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Connaître les valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

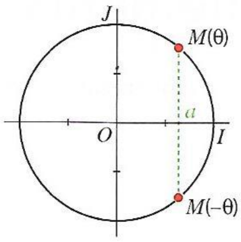
Dériver des fonctions trigonométriques

Soient $f : x \mapsto \cos(u(x))$ et $g : x \mapsto \sin(u(x))$.
Alors :
$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$
et $g'(x) = u'(x)\cos(u(x))$.

Résoudre des équations trigonométriques

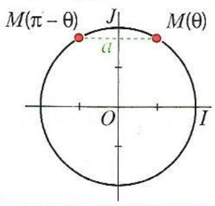
- **$\cos(x) = a$ sur $[-\pi\,;\pi]$**

Si $-1 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{-\theta\,;\theta\}$, avec θ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\theta \in \,]0\,;\pi[$.



- **$\sin(x) = a$ sur $[-\pi\,;\pi]$**

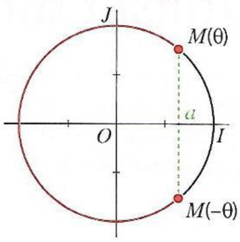
Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{\pi-\theta\,;\theta\}$, avec θ tel que $\sin(\theta) = a$ et $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.



Résoudre des inéquations trigonométriques

- **$\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi\,;\pi]$**

Si $-1 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi\,;-\theta] \cup [\theta\,;\pi]$ avec θ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\theta \in \,]0\,;\pi[$.



- **$\sin(x) \leqslant a$ sur $[-\pi\,;\pi]$**

Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi\,;\theta] \cup [\pi-\theta\,;\pi]$, avec θ tel que $\sin(\theta) = a$ et $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.