Equations

Une équation est une égalité faisant intervenir une lettre appelée inconnue. Résoudre une équation c'est déterminer toutes les valeurs de l'inconnue afin que l'égalité proposée soit vérifiée. Résoudre l'équation $3x-6=0$, l'équation $x^2-9=16$ et l'équation $1-x-2x^2=0$.

Equations différentielles

Une équation différentielle est une équation pour laquelle l'inconnue recherchée n'est pas une valeur mais une fonction et pour laquelle l'égalité proposée fait intervenir la dérivée de cette fonction. Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables qui vérifient l'égalité.

1. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=2x$.
2. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=3x^2$.
3. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=e^x$.
4. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=1/x$.
5. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=-1/x^2$.
6. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=1/2\sqrt{x}$.

Equations différentielles, solutions uniques ?

1. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)=0$?
2. Pour les six équations différentielles précédentes, donner toutes les solutions possibles.

Unicité de la solution lorsqu'une condition initiale est proposée

1. Trouver la solution de l'équation $f'(x)=2x$ vérifiant la condition initiale $f(0)=1$.
2. Trouver la solution de l'équation $f'(x)=3x^2$ vérifiant la condition initiale $f(0)=2$.
3. Trouver la solution de l'équation $f'(x)=e^x$ vérifiant la condition initiale $f(0)=3$.
4. Trouver la solution de l'équation $f'(x)=1/x$ vérifiant la condition initiale $f(1)=1$.
5. Trouver la solution de l'équation $f'(x)=-1/x^2$ vérifiant la condition initiale $f(1)=2$.
6. Trouver la solution de l'équation $f'(x)=1/2\sqrt{x}$ vérifiant la condition initiale $f(1)=3$.

Définition

On appelle **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I et dont la dérivée F' est la fonction f.

$$f \underset{\text{a pour dérivée}}{\overset{\text{a pour primitive}}{\rightleftarrows}} F$$

Propriétés

- Si f admet une primitive F, k étant une constante réelle quelconque, alors toute fonction G telle que $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de f. Réciproquement, si F et G sont deux primitives de la fonction f, alors $G(x) = F(x) + k$.

- Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle. Parmi toutes les primitives une seule s'annule en un point de l'intervalle I.

Application

Compléter le tableau ci-dessous présentant les primitives de certaines fonctions usuelles :

	Fonction f	Primitives F	Domaine de validité
Constante	$f(x) = a$		IR
Identité	$f(x) = x$		IR
Carré	$f(x) = x^2$		IR
Cube	$f(x) = x^3$		IR
Puissance n	$f(x) = x^n$		IR
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$		$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
Exponentielle	$f(x) = e^x$		IR
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$		IR
Sinus	$f(x) = \sin(x)$		IR
Inverse du carré	$f(x) = \frac{1}{x^2}$		$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
Inverse de la racine	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$		$]0;+\infty[$

Application

$f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ $\qquad g(x) = x^3 + x - 1$ $\qquad h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $\qquad k(x) = e^x + \frac{1}{2x}$

Rappel sur la dérivée – Une exponentielle composée

Exponentielle composée	Dérivée
e^u	$u' \times e^u$

Utilisation dans le cadre d'un calcul de primitives :

$$f(x) = e^{2x+3} \qquad g(x) = 20e^{5x+2}$$

$$h(x) = \frac{1}{2x} + e^{2x} \qquad k(x) = x^4 + e^{-5x}$$

Rappel sur la dérivée – Un logarithme composé

Logarithme composé	Dérivée
$\ln(u)$ avec $u > 0$	u'/u

Utilisation dans le cadre d'un calcul de primitives :

$$f(x) = \frac{2}{2x+1} \qquad g(x) = \frac{1}{5x+2}$$

$$h(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x} \qquad k(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Rappel sur la dérivée – Une puissance composée

Puissance composée	Dérivée
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$

Utilisation dans le cadre d'un calcul de primitives :

$$f(x) = 2x\left(x^2+1\right)^4 \qquad g(x) = e^x\left(e^x+2\right)^3$$

Rappel sur la dérivée – Un inverse composé

Inverse composé	Dérivée
$\frac{1}{u}$ avec $u \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$

Utilisation dans le cadre d'un calcul de primitives :

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2} \qquad g(x) = \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Résoudre une équation différentielle

Le but du travail suivant est de comprendre la notation suivante : $\boxed{y' = 2y}$

On considère la fonction suivante : $f(x) = e^{2x}$

- Calculer $f(0)$.
- Calculer $f'(x)$.
- Nous décidons de noter $y = f(x)$. Exprimer y' en fonction de y.

On considère la fonction suivante : $g(x) = 3e^{2x}$

- Calculer $g(0)$.
- Calculer $g'(x)$.
- Nous décidons de noter $y = g(x)$. Exprimer y' en fonction de y.

On considère la fonction suivante : $h(x) = -4e^{2x}$

- Calculer $h(0)$.
- Calculer $h'(x)$.
- Nous décidons de noter $y = h(x)$. Exprimer y' en fonction de y.

Conclusion

- Résoudre l'équation différentielle $\boxed{y' = 2y}$ c'est trouver **toutes les fonctions** qui vérifient cette égalité. Toutes ces fonctions sont des fonctions **exponentielles composées** qui ont la forme suivante $\boxed{f(x) = Ce^{2x}}$.

- Pour déterminer la constante C il est nécessaire d'avoir une information supplémentaire appelée **condition initiale**.

Généralisation

Soit a un réel quelconque. Déterminer **toutes** les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

Autres formes prises par l'équation différentielle

Lorsque la forme de l'équation différentielle n'est pas $y' = ay$, on peut essayer de s'y ramener comme pour les situations suivantes. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ et la condition initiale $f(0) = 3$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $4y - y' = 0$ et la condition initiale $f(0,5) = 1$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $2y - 4y' = 0$ et la condition initiale $f(2) = 1$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $200y' + 50y = 0$ et la condition initiale $f(0) = 5$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $0,1y' - 3y = 0$ et la condition initiale $f(10) = 10$.

Théorème 1

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{ax}$

Cela signifie que si une fonction est du type $f(x) = Ce^{ax}$, alors elle est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, mais aussi que si une fonction est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, alors elle s'écrit sous la forme $f(x) = Ce^{ax}$. Le but du travail ci-dessous est de démontrer ces deux implications qui font le théorème.

Démonstration

- Supposons que f soit une fonction du type $f(x) = Ce^{ax}$, démontrons que c'est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Pour cela calculer $f'(x)$. Puis, En notant $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$, exprimer y' en fonction de y. Conclure.

- Supposons que f soit une solution de $y' = ay$, démontrons que f est une fonction du type $f(x) = Ce^{ax}$. Considérons la fonction g définie par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$ et calculons $g'(x)$. Que peut-on dire de la fonction g ? Conclure.

Théorème 2

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

Démonstration

- Supposons que f soit une fonction du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, démontrons que c'est une solution de $y' = ay + b$. Calculons $f'(x)$. En notant $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$, exprimer y' en fonction de y. Conclure.

- Supposons que f soit une solution de $y' = ay + b$, démontrons que f est un fonction du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Considérons pour cela la fonction g définie par $g(x) = e^{-ax} \times \left[f(x) + \frac{b}{a} \right]$. Calculons $g'(x)$. Que peut-on dire de g ? Conclure.

Exercice d'application directe

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 1$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.
2. Déterminer la solution de l'équation différentielle $4y' + 3y = 2$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Théorème 3

Les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b(x)$ où b n'est plus une constante mais une fonction de la variable x sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle et g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Démonstration

- Supposons que f soit une fonction du type $f(x) = Ce^{ax} + g(x)$ où g est une solution particulière de l'équation différentielle (E), démontrons que c'est une solution de $y' = ay + b(x)$. Pour cela calculons $f'(x)$. Parallèlement calculons $a \times f(x) + b(x)$. Rappelons également ce que signifie le fait que g soit une solution particulière de l'équation différentielle (E). Conclure.

- Supposons que f soit une solution de $y' = ay + b(x)$, démontrons que f est une fonction du type $f(x) = Ce^{ax} + g(x)$ où g est une solution particulière de l'équation différentielle (E). Considérons pour cela la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Calculons $h'(x)$ et montrons que cette fonction h est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Conclure.

Exercices d'application directe

1. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = e^{-5x+1} + \frac{3}{5}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = -5y + 3$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = 2x + 2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = -2y + 4x + 6$. En déduire toutes les solutions de (E).

3. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = -2y + e^{-2x}$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = -x - 1/2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = 2y + 2x$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

5. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = xe^{x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = y + e^{x}$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

6. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - e^{3x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = 3y + 3x^2 - 3x^3$. En déduire toutes les solutions de (E).

Un premier problème faisant intervenir une équation différentielle

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C. On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degrés Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four. Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C. On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+6y=150$.

1. Préciser la valeur de $f(0)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'+6y=150$.

3. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t)=200\times e^{-6t}+25$.

4. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four décroît et tend à se stabiliser à la température ambiante. La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

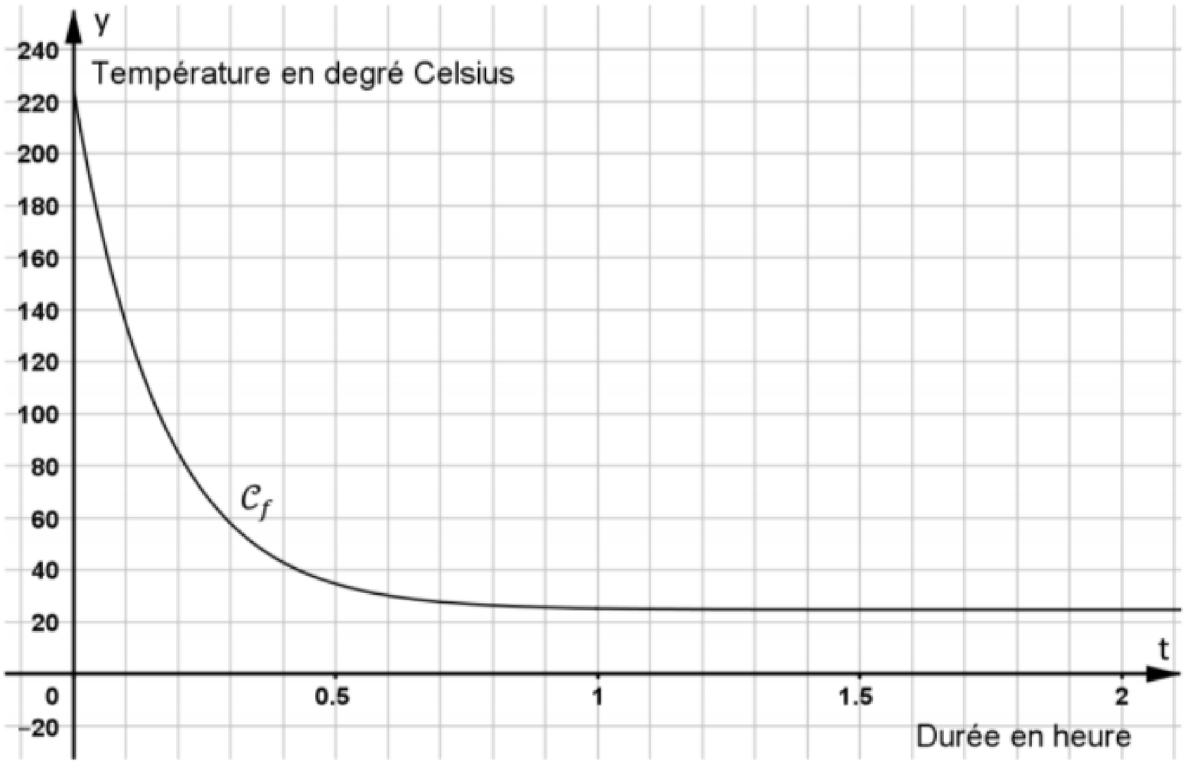
5. Montrer que l'équation $f(t)=40$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[$.

6. Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note t_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon. On donne ci-après la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal. Avec la précision permise par le graphique, lire t_0. On donnera une valeur approchée de t_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.

On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four. Ainsi, pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la (n+1)-ième minute après sa sortie du four. On admet que, pour tout entier naturel n : $D_n = f\left(\frac{n+1}{60}\right) - f\left(\frac{n}{60}\right)$.

7. Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

8. Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n, $D_n = 200\times e^{-0,1n}\left(1-e^{-0,1}\right)$. En déduire le sens de variation de la suite (D_n), puis la limite de la suite (D_n). Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ? Expliquer pourquoi.



<u>Un deuxième problème faisant intervenir une équation différentielle</u>

<u>Partie A – Etude d'une fonction</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

1. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

2. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

3. Etudier les variations de la fonction f.

<u>Partie B – Une première modélisation</u>

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est noté $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années.

L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.

Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle $(E_1) \Leftrightarrow y' = \dfrac{y}{4}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

2. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

3. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs ?

Partie C – Une modélisation plus complexe mais plus adaptée

En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t, exprimé en années, dans cette région et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions $(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{4} \\ u(0)=1 \end{cases}$ pour tout réel t positif ou nul, où u' désigne la dérivée de la fonction u.

1. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) \succ 0$. On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions : $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$ pour tout réel t positif ou nul, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

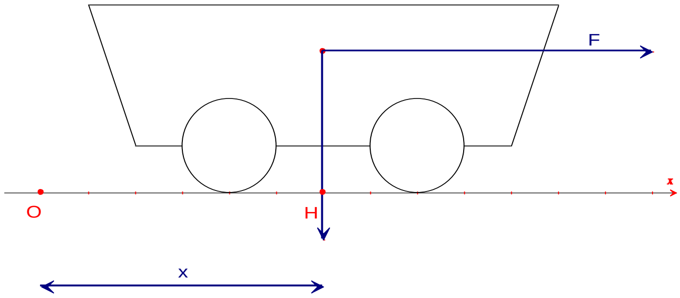
3. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$.

Un troisième problème faisant intervenir une équation différentielle

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire. Le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N m^{-1} s^{-1}.

La position du chariot est repérée par la distance x en mètres du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow 25x' + 200x'' = 50$ où x' est la dérivée de x par rapport au temps t, x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t. On rappelle que $v(t)=x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) suivante $(F)\Leftrightarrow v'=-\frac{1}{8}v+\frac{1}{4}$.



2. Résoudre l'équation différentielle (F).

On suppose que, à l'instant $t=0$, on a $x(0)=0$ et $v(0)=0$.

3. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

4. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t)=2t-16+16e^{-t/8}$.

5. Calculer $V=\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelle valeur de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite V ?

6. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Un quatrième et dernier problème faisant intervenir une équation différentielle

Une locomotive de 48 tonnes se déplace sur une voie ferrée rectiligne d'origine O. Le moteur de la locomotive génère une force d'entrainement constante E de valeur 36000 kN. Les forces de frottement F sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire et le coefficient de proportionnalité est égal à 240000 N km^{-1} h^{-1}.

On note $x(t)$ la distance en kilomètres parcourue par la locomotive en fonction du temps t. Au temps t sa vitesse est $x'(t)$ et son accélération est $x''(t)$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle $(E)\Leftrightarrow 48000\times x''(t)+240000\times x'(t)=36000000$.

On note $v(t)$ la vitesse au temps t. On rappelle que $v(t)=x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle $(F)\Leftrightarrow v'=-5v+750$. On suppose que, à l'instant $t=0$, on a $x(0)=0$ et $v(0)=0$. Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t. Etudier les variations de la fonction v sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et déterminer la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Au bout de combien de temps la vitesse de la locomotive dépassera-t-elle 120 km/h. Justifier de manière précise et détaillée la réponse.