Première inégalité de concentration : l'inégalité de Markov

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.

On a $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

La probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Deuxième inégalité de concentration : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit t un nombre réel strictement positif.

On a $P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$.

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins t de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que t est grand.

On a $1 - P(|X - E(X)| \geqslant t) = P(E(X) - t < X < E(X) + t)$.

Loi des grands nombres et convergence en probabilité

Utiliser la loi des grands nombres : convergence en probabilité

On répète n fois de manière indépendante une expérience aléatoire à laquelle on associe une variable aléatoire X. Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ ainsi obtenues ont la même loi que X (donc même espérance $E(X)$ et variance $V(X)$).

Pour tout $t > 0$, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{nt^2},$$

avec $M_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$,

et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant t) = 0$.

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour estimer l'espérance (la moyenne théorique), on peut répéter l'expérience de manière indépendante un grand nombre de fois et calculer la moyenne empirique.