Première inégalité de concentration : l'inégalité de Markov

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.

On a $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

La probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Deuxième inégalité de concentration : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit t un nombre réel strictement positif.

On a $P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$.

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins t de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que t est grand.

On a $1 - P(|X - E(X)| \geqslant t) = P(E(X) - t < X < E(X) + t)$.

Loi des grands nombres et convergence en probabilité

Utiliser la loi des grands nombres : convergence en probabilité

On répète n fois de manière indépendante une expérience aléatoire à laquelle on associe une variable aléatoire X. Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ ainsi obtenues ont la même loi que X (donc même espérance $E(X)$ et variance $V(X)$).

Pour tout $t > 0$, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{nt^2},$$

avec $M_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$,

et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant t) = 0$.

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour estimer l'espérance (la moyenne théorique), on peut répéter l'expérience de manière indépendante un grand nombre de fois et calculer la moyenne empirique.

Propriété Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires sur un même univers fini Ω et a est un nombre réel alors

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \text{ et } E(aX)=aE(X).$$

Remarques

- Si Y est constante égale à b (b un nombre réel), alors $E(X+b)=E(X)+b$.
- Plus généralement on a $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ et en particulier $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$.
- Si Z est aussi une variable aléatoire sur Ω, alors $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$.

Propriété Variance

Si X et Y sont deux variables aléatoires sur un même univers fini Ω et a est un nombre réel, alors :

- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ **si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes** (relation d'additivité).
- $V(aX)=a^2V(X)$.
- $\sigma(aX)=|a|\sigma(X)$.

Propriété Somme de variables indépendantes suivant une même loi de Bernoulli

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1+X_2+...+X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple

Si X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}17$ pour tout entier i tel que $1\leqslant i\leqslant 12$ alors $X=X_1+X_2+...+X_{12}$ suit la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0{,}17$.

Propriété Décomposition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, on a $X=X_1+X_2+...+X_n$ où les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple

Si X suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0{,}4$ alors
$X=X_1+X_2+X_3$ où X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}4$.

Remarque Cette propriété permet de montrer que si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, alors : $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$.

Définition Échantillon d'une variable aléatoire

Une liste $(X_1\,;X_2\,;...\,;X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associé à cette loi (ou à une variable aléatoire X suivant cette loi).

Propriété Espérance et variance de la somme et de la moyenne d'un échantillon

En considérant un échantillon de taille n $(X_1\,;X_2\,;...\,;X_n)$ d'une variable aléatoire X, et en posant $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ et $M_n=\dfrac{S_n}{n}$, on a :

$$E(S_n)=nE(X) \quad \text{et} \quad V(S_n)=nV(X)$$

$$E(M_n)=E(X) \quad \text{et} \quad V(M_n)=\frac{V(X)}{n}.$$