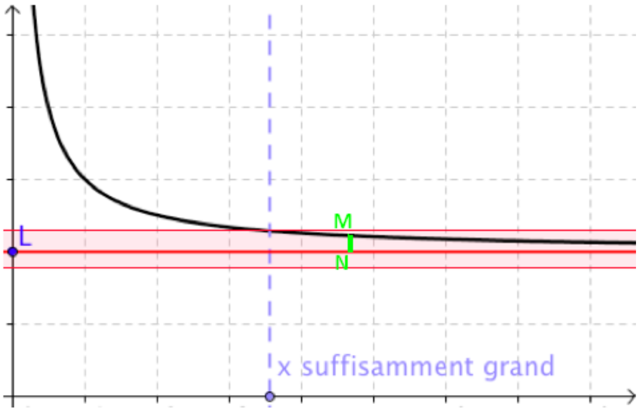
Limite finie à l'infini

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de f (x) dès que x est suffisamment grand.

Notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

On dit que la droite d'équation y = L est **asymptote horizontale** à la courbe de f

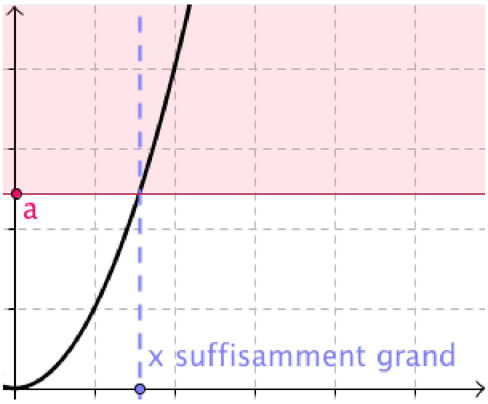


Limite infinie à l'infini

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de f (x) dès que x est suffisamment grand.

Notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Définition analogue :



On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de f (x) dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

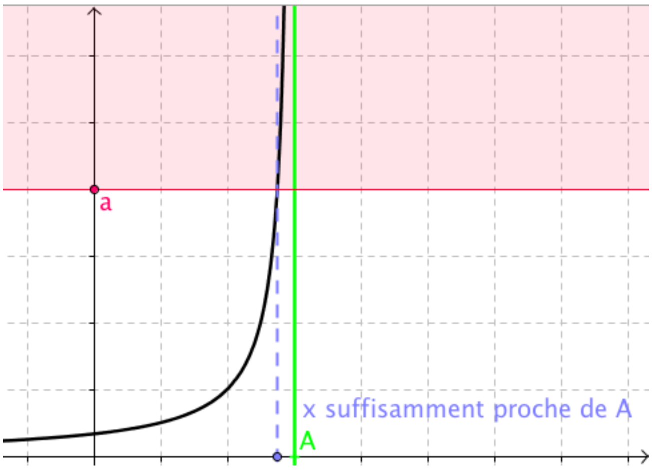
Limite infinie en un réel A

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de f (x) dès que x est suffisamment proche de A.

Notation : $\lim_{x\to A} f(x) = +\infty$

On dit que la droite d'équation x = A est **asymptote verticale** à la courbe de f.

Définition analogue :



On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de f (x) dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x\to A} f(x) = -\infty$.

Notion d'asymptote

De manière **intuitive**, une asymptote est une droite auprès de laquelle la courbe représentative d'une fonction se **rapproche** sans « jamais » la couper (l'étymologie du mot asymptote est « **qui ne coupe pas** »).

- Les **asymptotes horizontales** correspondent à une situation du type $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$.
- Les **asymptotes verticales** correspondent à une situation du type $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$.
- Les **asymptotes obliques** correspondent à une situation du type $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

Opérations sur les limites

Les théorèmes, présentés sous forme de tableaux – **voir activités** – permettent de connaître les limites de la **somme**, du **produit** et du **quotient** de deux fonctions. Les cases vides signalent les cas où, à priori, on ne sait pas conclure, c'est à dire les cas où **« tout est possible »**. On dit qu'il s'agit de **formes indéterminées**. Les autres cas sont **intuitifs** et **faciles à retenir**. Ils sont valables quelque soit les fonctions et ont le statut de **théorèmes**.

Formes indéterminées

Les cas d'indétermination **nécessiteront une étude particulière** chaque fois qu'ils se présenteront. Ces cas sont au nombre de **quatre** et peuvent se retenir de la façon suivante :

$$\boxed{"\infty-\infty"\ ;\ "0\times\infty"\ ;\ "\frac{\infty}{\infty}"\ ;\ "\frac{0}{0}"}.$$

Limite d'une fonction composée

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x\to a} u(x)=b \text{ et si } \lim_{x\to b} v(x)=c \text{ alors } \lim_{x\to a} v(u(x))=c}$$

Ce résultat s'applique lorsque a, b et c sont des réels ou sont remplacés par $+\infty$ ou encore $-\infty$

Les théorèmes des gendarmes

- Si $f(x)\le g(x)\le h(x)$ sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=L$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x)=L$.

- Si $f(x)\le g(x)\le h(x)$ sur un intervalle du type $]-\infty;b]$ et si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} h(x)=L$ alors $\lim_{x\to-\infty} g(x)=L$.

- Si $f(x)\le g(x)$ sur $[a;+\infty[$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

- Si $g(x)\le h(x)$ sur $]-\infty;b]$ et si $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Continuité d'une fonction

La **notion de continuité** d'une fonction a pour but de traduire mathématiquement le fait que sa courbe représentative puisse se tracer sans trou, **sans lever le crayon**. On dit que f est **continue** au point $x=a$ si f est définie sur un voisinage de a et $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)}$.

Les fonctions continues

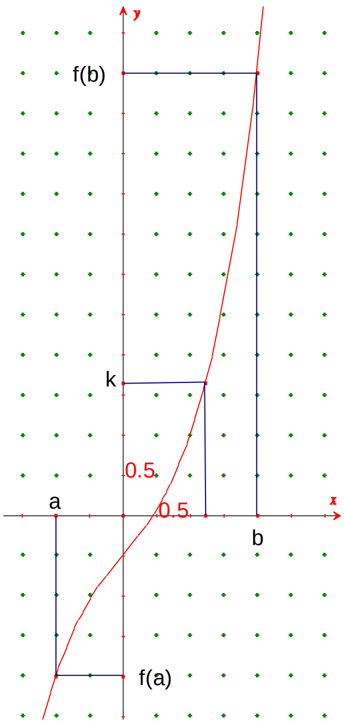
Les fonctions **polynômes** sont continues sur R. Les fonctions **cosinus** et **sinus** sont continues sur R. Les fonctions **rationnelles** sont continues sur tout intervalle excluant les valeurs interdites éventuelles.

Si u et v sont continues en $x=a$ alors la **somme** $u+v$, le **produit** $u\times v$ sont eux aussi continues en $x=a$. Le **quotient** u/v est lui aussi continue **à condition que** $v(a)\neq 0$. La **composée** $v\circ u$ est elle aussi continue **à condition que** v soit continue en $x=u(a)$.

Une fonction non continue : la fonction partie entière

La partie entière de x notée $E(x)$ est définie ainsi : si $x\in[n;n+1[$ avec $n\in N$ alors $E(x)=n$
La partie entière présente **des discontinuités** pour chaque abscisse entière. Elle **n'est pas continue**.

Théorème de la valeur intermédiaire



Sur un intervalle fermé

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet **une unique solution** dans l'intervalle $[a;b]$.

On dit que f **réalise une bijection** de $[a;b]$ sur l'intervalle $[f(a);f(b)]$ si la fonction est croissante, ou de $[a;b]$ sur l'intervalle $[f(b);f(a)]$ si la fonction est décroissante.

Ce théorème permet de déterminer **une valeur approchée** de la solution d'une équation par la méthode dite de **balayage**.

Sur un intervalle ouvert

a, b, α et β désignent des réels ou bien $+\infty$ ou bien $-\infty$. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\beta$. Si f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $]a;b[$, alors pour tout réel $k\in]\alpha;\beta[$ β l'équation $f(x)=k$ admet **une unique solution** dans l'intervalle $]a;b[$

Fonction dérivable en un point

On dit que f est dérivable en a si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet **une unique limite finie** quand $h \to 0$. Cette limite est appelée **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a et se note $f'(a)$. Une équation de cette tangente s'écrit $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Fonction dérivable sur un intervalle

On dit que la fonction f **est dérivable sur l'intervalle I** lorsque f est dérivable en tout x de I.
On appelle **dérivée** de f la fonction notée f' qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$
Si f' est elle-même dérivable, la dérivée de f' est appelée **dérivée seconde** et est notée f''.

Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	k	x^n	$1/x$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$
Dérivée	0	nx^{n-1}	$-1/x^2$	$1/2\sqrt{x}$	$-\sin x$	$\cos x$
Validité	IR	IR	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	IR	IR

Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I. Alors les fonctions $u+v$, ku, uv sont dérivables sur I. De plus, si v ne s'annule pas sur I, la fonction u/v est aussi dérivable sur I.

Fonction	$u+v$	ku	uv	u/v
Dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Les fonctions **polynômes** sont dérivables sur R. Les fonction **cosinus et sinus** sont aussi dérivables sur R. Les fonctions **rationnelles** elles sont dérivables sur tout intervalle **excluant** les valeurs interdites éventuelles.

Dérivée de la composée de deux fonctions

Si u est une fonction dérivable sur I et v une fonction dérivable en $u(x)$ pour tout x de I, alors la fonction **composée** $v \circ u$ est dérivable sur I et on a : $\boxed{(v\circ u)'(x) = u'(x)\times v'(u(x))}$.

Application directe

$\boxed{(\cos u)' = -u'\sin u}$ $\boxed{(\sin u)' = u'\cos u}$ $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$ $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$