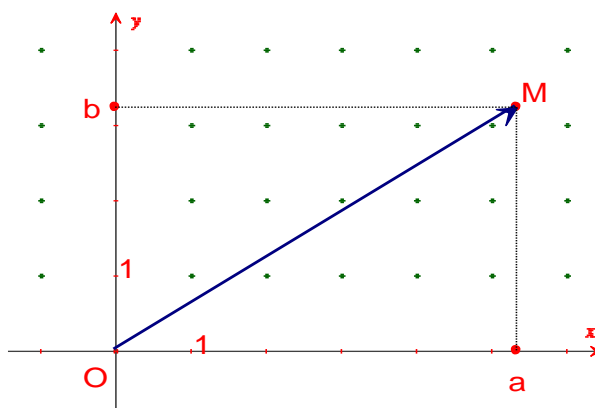


**Association de points et de nombres dans le plan complexe**

A tout point  $M$  de coordonnées  $(a;b)$  du plan complexe, on associe **un nombre complexe** noté  $z$  qui s'écrit  $z = a + ib$ .

Réciproquement, à tout nombre complexe  $z = a + ib$ , on associe **un point** dans le plan complexe de coordonnées  $(a;b)$ .



Le nombre  $z$  est appelé **l'affixe** du point  $M$ .  $M$  est appelé **le point image** du nombre  $z$ .

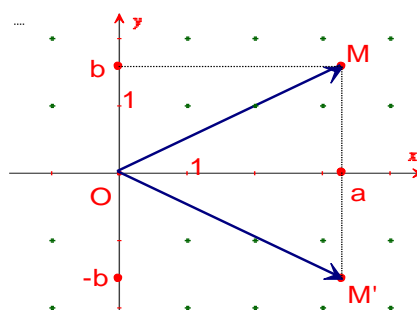
**Vocabulaire**

- $a$  est appelée **la partie réelle** de  $z$  et est notée  $\text{Re}(z)$ .
- $b$  est appelée **la partie imaginaire** de  $z$  et est notée  $\text{Im}(z)$ .
- L'écriture  $z = a + ib$  est appelée **la forme algébrique** du nombre complexe.
- **Un imaginaire pur** est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle.
- **Un réel** est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.

**Le conjugué d'un nombre complexe**

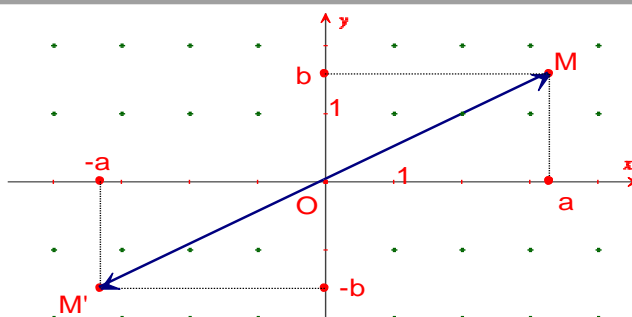
On note  $M'$  le symétrique du point  $M$  par rapport à l'axe des abscisses. Si l'affixe du point  $M$  est  $z = a + ib$ , alors l'affixe du point  $M'$  est appelée **conjugué du nombre  $z$**  et s'écrit  $\bar{z} = a - ib$ .

La notation  $\bar{z}$  se lit «  $z$  barre ».

**L'opposé d'un nombre complexe**

On note  $M'$  le symétrique du point  $M$  par rapport à l'origine du plan complexe.

Si l'affixe du point  $M$  est  $z = a + ib$ , alors l'affixe du point  $M'$  est appelée **l'opposé du nombre  $z$**  et s'écrit  $-z = -a - ib$ .

**Egalité de deux nombres complexes**

Dire que deux nombres complexes sont égaux c'est dire qu'ils **ont la même partie réelle** et **la même partie imaginaire**.

### Opérations avec les nombres complexes

Soit deux nombres complexes  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ .

Pour effectuer des calculs avec ces deux nombres complexes (addition, soustraction, multiplication, division) il suffit d'utiliser  $i^2 = -1$  et les mêmes règles de calculs que dans  $\mathbb{C}$ .

Ci-contre trois formules à ne pas apprendre par cœur mais à savoir retrouver dans chaque cas...

#### La somme

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

#### Le produit

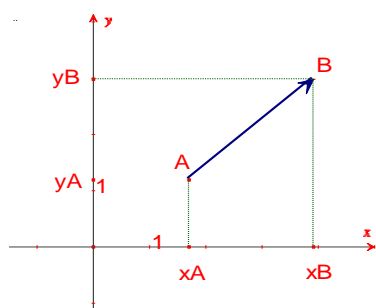
$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

#### L'inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

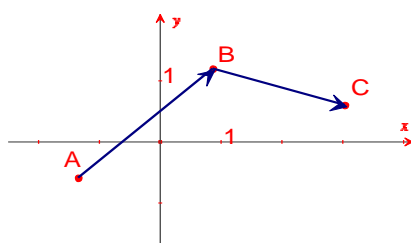
**Remarque :** le passage à l'inverse nécessite l'utilisation du conjugué...

### Les affixes et la géométrie



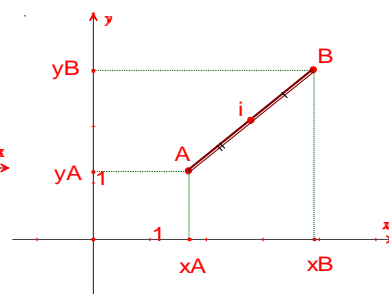
La différence

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$$



La somme

$$z_{\overline{AC}} = z_{\overline{AB}} + z_{\overline{BC}}$$



La demi somme

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

### Propriétés des conjugués

$$\overline{\overline{z + z'}} = \overline{\overline{z} + \overline{z'}}$$

$$\overline{\overline{z \times z'}} = \overline{\overline{z} \times \overline{z'}}$$

$$\overline{\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

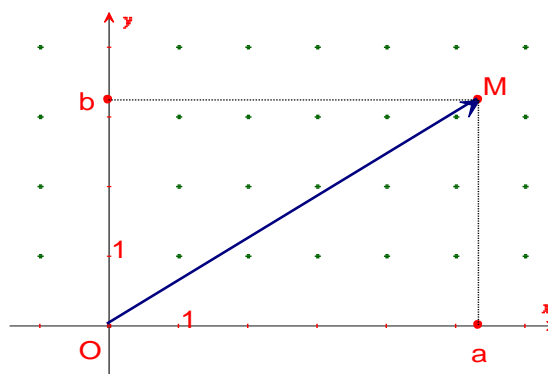
$$\overline{z \times \overline{z}} = a^2 + b^2$$

- Le nombre  $z$  est un **réel** si et seulement si  $\overline{z} = z$ .
- Le nombre  $z$  est un **imaginaire pur** si et seulement si  $\overline{z} = -z$ .

### Module et argument d'un nombre complexe

On appelle **module** d'un nombre complexe  $z$  la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . Le module de  $z$  est noté  $|z|$  et se calcule comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Ainsi  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

On appelle **argument** d'un nombre complexe  $z$  **non nul** une mesure de l'angle orienté  $\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ . L'argument de  $z$  est noté  $\arg(z)$ .



**Propriétés du module**

Des égalités

- Un nombre complexe est nul si et seulement si son **module est nul**.  $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
- Le module du **produit** de deux complexes est égal au **produit** de leur module.  $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Le module du **quotient** de deux complexes est égal au **quotient** de leur module.  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$  si  $z' \neq 0$
- Le module de la **puissance** d'un complexe est égal à la **puissance** du module.  $|z^n| = |z|^n$

Une inégalité – L'inégalité triangulaire

Le module d'une **somme est inférieure à la somme** des modules.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

**Propriétés d'un argument**

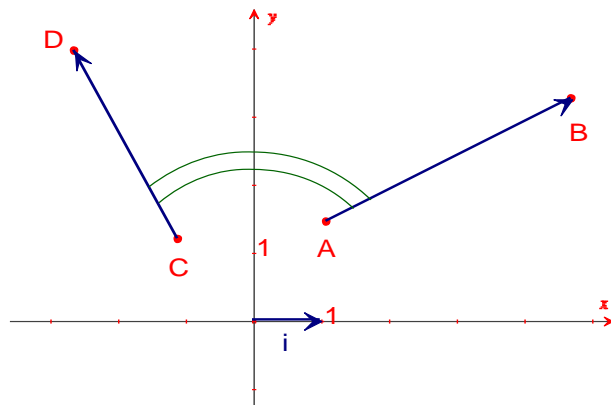
- Un argument du **produit** de deux complexes est égal à la **somme** des deux arguments.  $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
- Un argument du **quotient** de deux complexes est égal à la **différence** des deux arguments.  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- Un argument de la **puissance n** d'un complexe est égal au **produit** de l'argument par n.  $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$

**Attention ! Il n'existe pas** de relation pour un argument de la somme de deux complexes !  $\arg(z + z') = \emptyset$

**Le module et la géométrie – Un argument et la géométrie**

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan complexe d'affixes  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ .

- $|z_B - z_A| = AB$ ,
- $|z_D - z_C| = CD$ ,
- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}; \overrightarrow{AB})$ ,
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ .



**Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe**

Tout nombre complexe non nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$  peut s'écrire sous une forme appelée la **forme trigonométrique** :

$$z = \underbrace{r(\cos \theta + i \sin \theta)}_{\text{FORME TRIGONOMETRIQUE}}$$

Tout nombre complexe non nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$  peut s'écrire sous une forme condensée appelée la **forme exponentielle** :

$$z = \underbrace{r(\cos \theta + i \sin \theta)}_{\text{FORME TRIGONOMETRIQUE}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{FORME EXPONENTIELLE}}$$

La notation sous **forme exponentielle** permet de mémoriser facilement **toutes les propriétés** du module et de l'argument à travers les formules suivantes :

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr' \times e^{i(\theta+\theta')}$ ,
- $\frac{1}{r \times e^{i\theta}} = \frac{1}{r} \times e^{-i\theta}$ ,
- $\frac{r \times e^{i\theta}}{r' \times e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\theta-\theta')}$ .

**Les formules d'Euler**

On trouve ci-dessous les quatre formules d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

**La formule de Moivre**

- La formule de Moivre est :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ ,
- Cette formule peut s'écrire de manière plus synthétique de la façon suivante  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ .

Cette formule peut être utilisée pour retrouver :

- Les **formules de duplication** du cosinus et du sinus,
- Les **formules d'addition et de soustraction** du cosinus et du sinus,
- Ainsi que la **propriété fondamentale** liant les carrés du cosinus et du sinus.