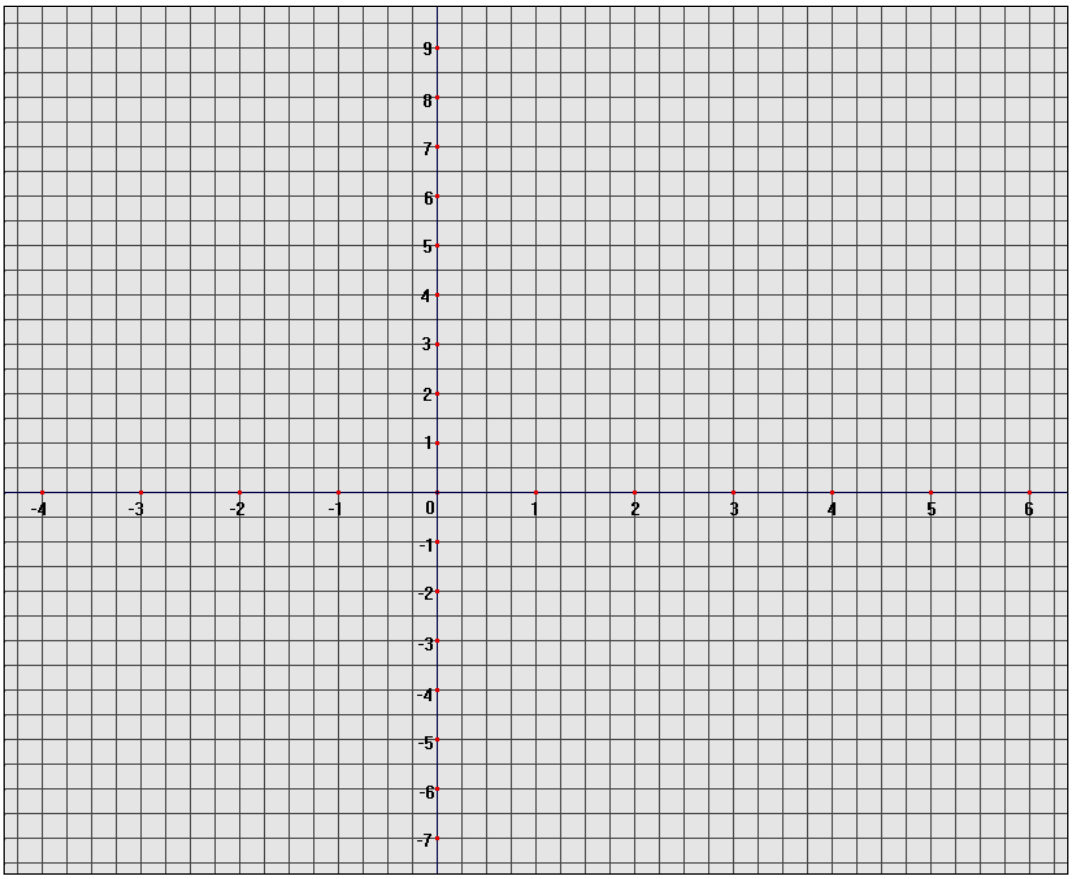


On considère le fonction f définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $f(x)=(x-1)^2-4$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessus.

Autres formes de l'expression algébrique

2. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x)=x^2-2x-3$.
   Cette forme est la forme développée de l'expression.

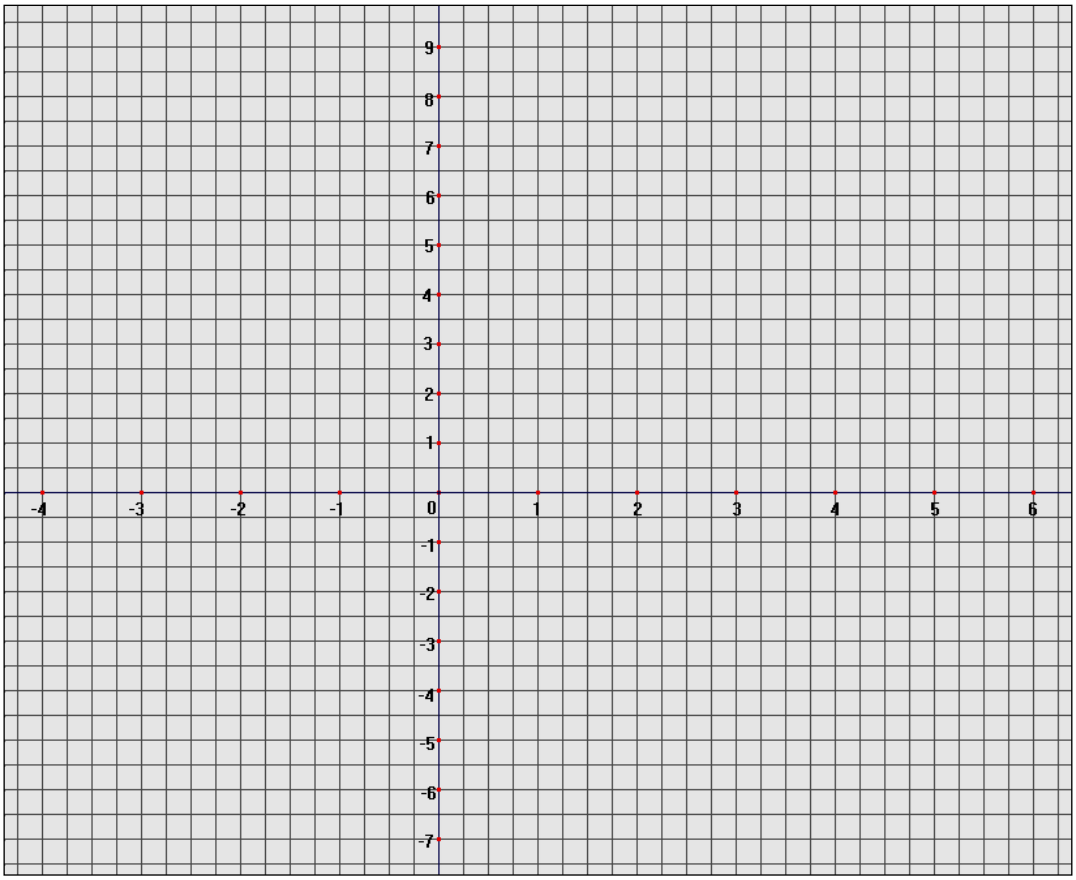
3. Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x)=(x+1)(x-3)$.
   Cette forme est la forme factorisée de l'expression.

Utilisation réfléchie de l'une ou l'autre des expressions

4. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant l'expression la mieux adaptée.

- Calculer $f(-1)$.
- Calculer $f(3)$.
- Résoudre $f(x)=0$.
- Résoudre $f(x)=-4$.
- Calculer $f(1)$.
- Calculer $f(0)$.
- Résoudre $f(x)=-3$.
- Résoudre $f(x)=5$.

5. Quelles informations graphiques contiennent chacune des trois expressions de f ?



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par $f(x)=-(x-1)^2+9$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessus.

Autres formes de l'expression algébrique

2. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x)=-x^2+2x+8$.
   Cette forme est la forme développée de l'expression.

3. Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x)=(x+2)(4-x)$.
   Cette forme est la forme factorisée de l'expression.

Utilisation réfléchie de l'une ou l'autre des expressions de la fonction f

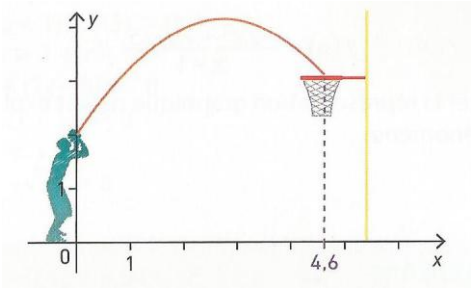
4. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant l'expression la mieux adaptée.

- Calculer $f(4)$.
- Calculer l'image de 1.
- Résoudre $f(x)=0$.
- Résoudre $f(x)=9$.
- Calculer $f(-2)$.
- Calculer l'image de 0.
- Résoudre $f(x)=8$.
- Résoudre $f(x)=5$.

5. Quelles informations graphiques contiennent chacune des trois expressions de f ?

Forme développée, forme canonique et forme factorisée

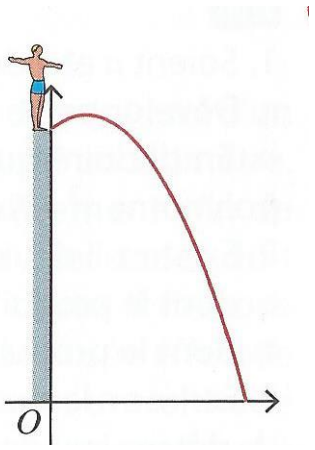
On modélise la trajectoire d'un ballon qui entre dans le panier lors d'un lancer franc. Cette trajectoire est un arc de parabole donné par la fonction f proposée ci-contre sous forme développée et canonique où x et $f(x)$ sont exprimés en mètres.



$$f(x) = -0,3x^2 + 1,5x + 2$$
$$f(x) = -0,3(x-2,5)^2 + 3,875$$

1. Quelle expression choisir pour déterminer la taille du basketteur ? Quelle est cette taille ? Justifier.
2. Quelle expression choisir pour déterminer la hauteur maximale pour le ballon ? Quelle est cette hauteur maximale ? Justifier.

Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par un arc de parabole donné par la fonction g qui représente la hauteur du plongeur par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale parcourue. Cette fonction est donnée sous forme développée, canonique et factorisée où x et $g(x)$ sont exprimés en mètres.



$$g(x) = -0,2x^2 + 0,8x + 15,4$$
$$g(x) = -0,2(x-2)^2 + 16,2$$
$$g(x) = -0,2(x+7)(x-11)$$

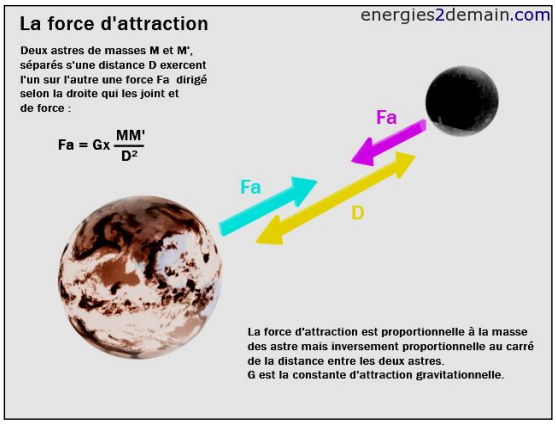
1. Quelle expression choisir pour déterminer la hauteur de la falaise ? Quelle est cette hauteur ?
2. Quelle expression choisir pour déterminer la hauteur maximale atteinte par le plongeur au cours du plongeon ? Quelle est cette hauteur ? Justifier.
3. Quelle expression choisir pour déterminer la distance de la falaise à laquelle le plongeur rentre dans l'eau ? Quelle est cette distance ? Justifier.

On propose ci-dessus deux fonctions polynômes du second degré sous trois formes différentes : la forme développée, la forme canonique et la forme factorisée. A l'aide de la forme adaptée :

- Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole,
- Préciser si le sommet est un maximum ou un minimum,
- Déterminer le point d'intersection de la courbe représentative avec les ordonnées,
- Déterminer les points d'intersection de la courbe représentative avec les abscisses.

Forme développée	Forme canonique	Forme factorisée
ax^2+bx+c	$a(x-u)^2+v$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$f(x) = 0,5x^2 - x - 1,5$	$f(x) = 0,5(x-1)^2 - 2$	$f(x) = 0,5(x+1)(x-3)$
$g(x) = -x^2 - 2x + 15$	$g(x) = -(x+1)^2 + 16$	$g(x) = -(x-3)(x+5)$

Force d'attraction



Lorsqu'une fusée de masse M (ou tout autre corps de l'espace) est situé sur la droite Terre/Lune, il subit :

- Une attraction de la part de la Terre proportionnelle au produit des deux masses (celle de la Terre et celle de la fusée) et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare la Terre de la fusée,
- Une attraction de la part de la Lune proportionnelle au produit des deux masses (celle de la Lune et celle de la fusée) et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare la Lune de la fusée.

Dans ce problème, on appelle x la distance qui sépare la fusée de la Terre, M la masse de la fusée, M_T la masse de la Terre, M_L la masse de la Lune, G le coefficient de proportionnalité appelé la constante d'attraction gravitationnelle.

Dans ce problème, on considère que : la distance Terre/Lune est égale à 400 milliers de kilomètres et que la masse de la Terre est 81 fois supérieure à la masse de la Lune. Le millier de kilomètre sera l'unité de mesure.

Le but du problème est de déterminer les endroits de la droite Terre/Lune où l'attraction exercée par la terre et l'attraction exercée par la lune sur la fusée M sont identiques.

Etude des paramètres du problème

Exprimer, en fonction de x, la distance qui sépare la fusée de la lune. Exprimer, en fonction de x, l'attraction F_T de la terre sur la fusée. Exprimer, en fonction de x, l'attraction F_L de la lune sur la fusée.

Résolution de l'équation du problème

Modéliser le problème par une équation (E) faisant intervenir les lettres G, M, M_T, M_L et x. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2 - 810x + 162000 = 0$. Déterminer la forme canonique du trinôme $x^2 - 810x + 162000$. En déduire les solutions de l'équation (E).

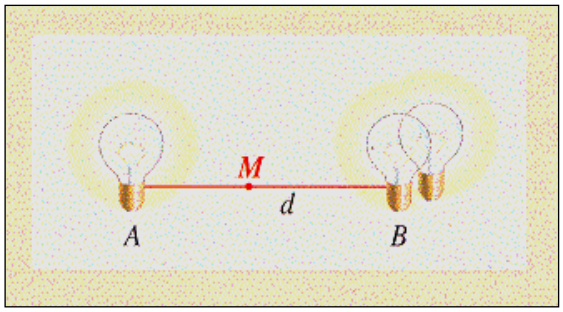
Réponse au problème posé

Répondre précisément au problème posé. On pourra éventuellement faire un schéma.

Luminosité

Le problème suivant fut proposé par le mathématicien Alexis Clairaut (Paris, 1713 – Paris, 1765).

« Deux lumières, dont l'une est quatre fois plus intense que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois pieds, comment déterminer sur la droite qui les joint le/les point(s) qu'elles éclairent également ? »



Appelons M le point cherché, et rappelons une loi physique sur la luminosité en un point éclairé par une source : **« La luminosité est proportionnelle à l'intensité de la source et inversement proportionnelle au carré de la distance à la source »**.

Appelons k le coefficient de proportionnalité évoqué dans la loi physique. Appelons i l'intensité de la lumière la plus faible. Appelons x la distance de la lumière la plus faible au point M.

1. Exprimer en fonction de k, i et x la luminosité en M venant de la source la plus faible.
   Exprimer en fonction de k, i et x la luminosité en M venant de la source la plus forte.

2. Modéliser le problème par une équation (E) faisant intervenir les lettres k, i et x.

3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2+2x-3=0$. Résoudre l'équation (E) et répondre de manière précise au problème posé par Alexis Clairaut.

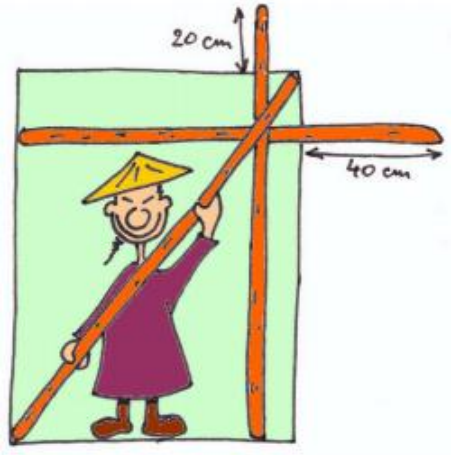
Attention ! Démonstration…

Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont trois réels quelconques tels que $a\neq 0$. Nous appelons $\Delta=b^2-4ac$ le **discriminant** du trinôme. Nous appelons **racines** du trinôme les solutions de $ax^2+bx+c=0$.

1. Démontrer l'égalité suivante : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
2. En déduire que si $\Delta>0$ alors $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$.
3. Déterminer en fonction de a, b et c la forme générale des deux racines d'un trinôme.
4. Démontrer que la somme des racines d'un trinôme est toujours égale à $-\dfrac{b}{a}$.
   Démontrer que le produit des racines d'un trinôme est toujours égal à $\dfrac{c}{a}$.
5. Appliquer ces formules aux équations des deux problèmes précédents (force, luminosité).

Résolution de quatre problèmes du second degré

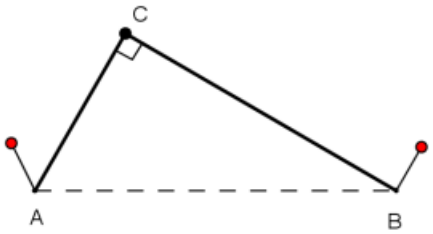
Une perche et une porte rectangulaire



On veut faire passer par une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, une perche dont on ne connaît pas la longueur. Horizontalement, il manque 40 centimètres pour que la perche puisse sortir par la porte. Verticalement il manque 20 centimètres pour que la perche ne puisse sortir par la porte. De manière oblique elle sort juste.

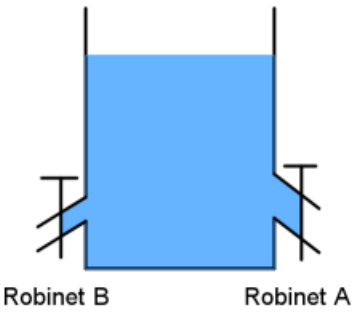
Sauriez-vous déterminer quelles sont les dimensions de la porte et de la perche ?

Une histoire de ficelle



Une ficelle longue de 89 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 65 cm. Est-il possible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en C ? Après avoir modélisé le problème par une équation du second degré répondre de manière précise et détaillée à la question posée.

Une histoire de robinet



Un robinet B met 40 min de plus qu'un robinet A pour vider un réservoir. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets le réservoir est vidé en 48 min. Quel temps faut-il à chacun pour vider le réservoir ?

Pour modéliser le problème on aura besoin de la notion physique de débit (volume par unité de temps) et du fait que le débit lorsque les deux robinets sont ouverts est égal à la somme des débits de chaque robinet.

Le portrait de Mona Lisa

On rappelle dans un premier temps que, quel que soit les nombres S et P, les racines du trinôme $x^2 - Sx + P$ ont pour somme S et pour produit P. A l'aide de ce résultat, résoudre le problème suivant :

« Le célèbre tableau du peintre italien Léonard Da Vinci, La Joconde ou Portrait de Mona Lisa possède les caractéristiques suivantes : un périmètre de 260 centimètres et une aire de 4081 centimètres carrés. Sauriez-vous retrouver les dimensions de ce tableau ? »

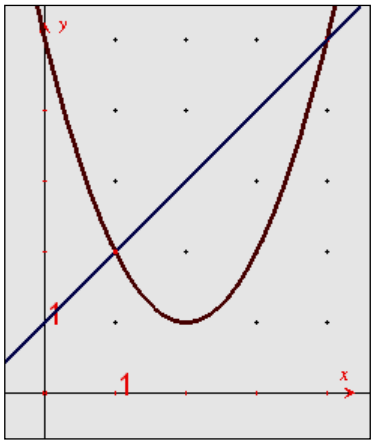
Intersection entre une parabole et une droite

On considère une droite d'équation $y = mx + q$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et on s'intéresse aux **intersections** de la droite avec la parabole. Le problème se traduit par le système ci-contre :

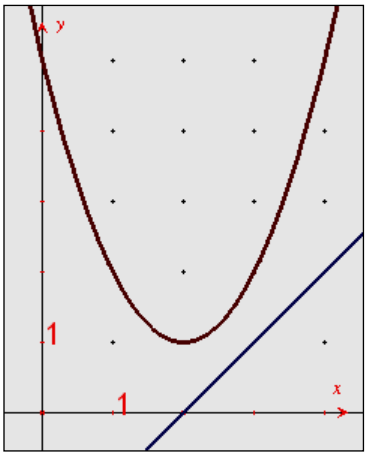
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Analyse graphique

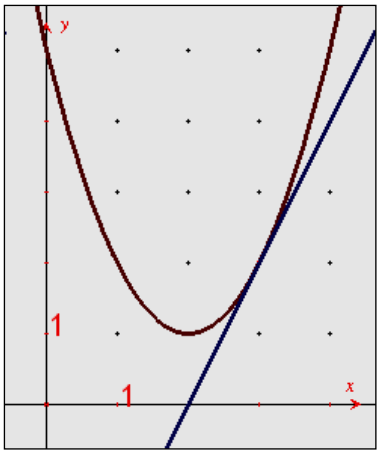
Graphiquement il est clair que **trois situations** sont possibles. Dans la première la droite coupe la parabole en **deux points distincts**, dans la deuxième la droite **ne coupe pas** la parabole, dans la troisième la droite coupe **une seule fois** la parabole, on dit qu'elle est **tangente** à la parabole.



Situation 1



Situation 2



Situation 3

Analyse algébrique

Dans chacun des cas suivants, déterminer combien de fois la droite proposée coupe la parabole (P), puis déterminer, si ils existent, les coordonnées des éventuels points d'intersection.

- la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ et la droite (D1) d'équation $y = x + 1$.
- la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ et la droite (D2) d'équation $y = x - 2$.
- la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ et la droite (D3) d'équation $y = 2x - 4$.

Conclusion

Ainsi le **discriminant** Δ est l'outil algébrique qui permet de compter le nombre de points d'intersections entre une parabole et une droite.

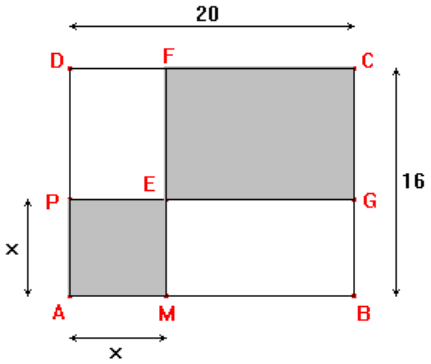
Exercices d'application directe

- Etudier la position relative de la parabole (P) d'équation $y = x^2 + x + 1$ et des trois droites (D1), (D2) et (D3) d'équations respectives $y = -x + 4$, $y = -3x - 3$ et $y = 0,5x + 0,5$.
- Etudier la position relative de la parabole (P) d'équation $y = -2x^2 + 3x + 2$ et des trois droites (D1), (D2) et (D3) d'équations respectives $y = x - 2$, $y = -x + 4$ et $y = 2x + 3$.

La forme canonique au service de l'optimisation

Un carré et un rectangle dans un rectangle

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 20$ et $AD = 16$. M étant un point du segment [AB], on construit le carré AMEP et le rectangle EGCF. On note x la longueur du segment [AM]. On note $f(x)$ l'aire de la partie colorée.



1. A quel intervalle I appartient x ?
2. Démontrer que la forme développée de l'expression $f(x)$ est $f(x) = 2x^2 - 36x + 320$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et dresser le tableau des variations de f sur l'intervalle I.
4. Pour quelle valeur de x l'aire colorée est-elle minimale ?
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire colorée est-elle la moitié de celle du rectangle ABCD ?

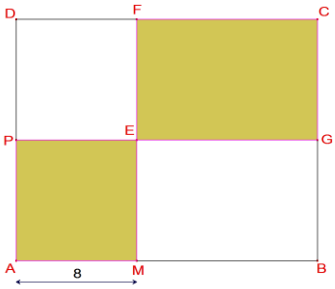


Figure 1

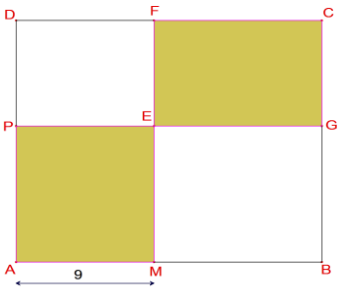


Figure 2

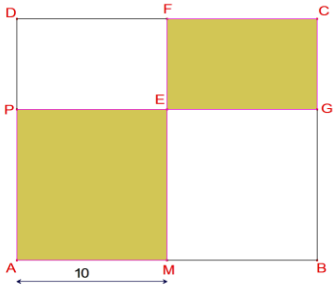
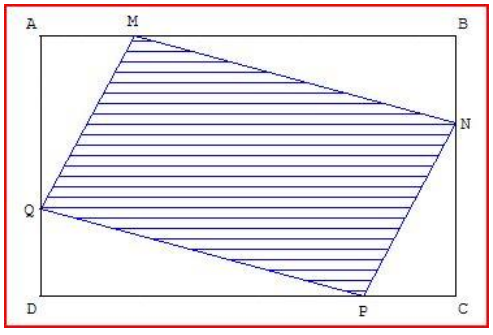


Figure 3

Un parallélogramme dans un rectangle

ABCD est un rectangle de longueur $AB = 9$ et de largeur $BC = 6$. À l'intérieur de ce rectangle on trace le parallélogramme MNPQ tel que $AM = BN = CP = BQ = x$. On note $A(x)$ son aire.

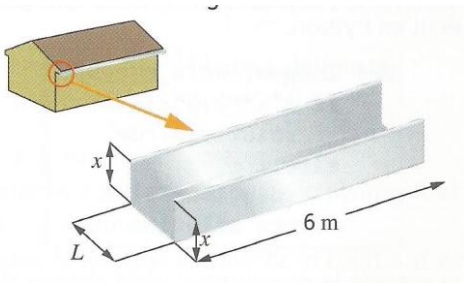
Le but de cet exercice est de déterminer où il faut placer le point M pour que l'aire du parallélogramme MNPQ soit minimale. Démontrer que $A(x) = 2x^2 - 15x + 54$, déterminer la forme canonique du trinôme, réfléchir à l'intervalle d'appartenance de x et dresser le tableau de variations de cette fonction. Répondre enfin au problème posé.



Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles l'aire du parallélogramme MNPQ est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD ? Détailler les étapes du raisonnement.

Construction d'une gouttière

Un bricoleur souhaite réaliser une gouttière pour sa cabane de jardin mesurant 6 mètres de long. Il dispose d'une feuille de métal rectangulaire de dimensions 6 mètres et 14 centimètres. Il compte plier chaque côté de la feuille en les relevant perpendiculairement. On désigne par x la longueur d'un côté relevé. On souhaite déterminer la valeur de x qui maximise la contenance (donc le volume) de la gouttière.



Montrer que le volume de la gouttière exprimé en cm^3 est $V(x) = -1200x^2 + 8400x$. Déterminer la forme canonique du trinôme, réfléchir à l'intervalle d'appartenance de x, dresser le tableau de variations de la fonction V sur cet intervalle et en déduire la valeur de x pour laquelle la contenance de la gouttière est maximale. Répondre de manière précise au problème posé.

Etude d'un bénéfice

Une entreprise produit chaque jour une quantité x d'objets comprise entre 0 et 50. Une étude a montré que le coût total de la production de x objets est donné, en euros, par la fonction $C(x) = 3x^2 - 100x + 900$. Un objet est vendu au prix de 20 euros.

1. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de la quantité x d'objets fabriqués.

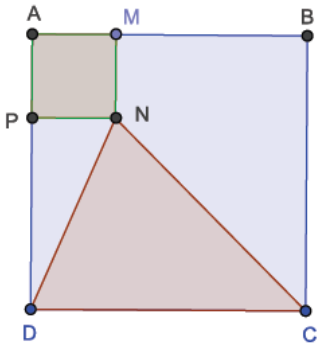
2. Montrer que le bénéfice, défini comme la différence entre la recette et les coûts de production est donné par la fonction $B(x) = -3x^2 + 120x - 900$.

3. Déterminer la forme canonique de la fonction B et en déduire la quantité d'objet à produire pour obtenir un bénéfice maximal (préciser la valeur de ce bénéfice maximal).

4. Déterminer en détaillant le raisonnement adopté, les « points morts de la production », c'est-à-dire les quantités d'objets pour lesquelles le bénéfice est nul.

Un carré et un triangle dans un carré

ABCD est un carré de 20 centimètres de côté. Soit M un point du segment [AB] et N et P tels que le quadrilatère AMNP soit un carré, P appartenant au segment [AD]. On note $x = AM$. On notera $f(x)$ l'aire du carré AMNP et $g(x)$ celle du triangle CDN.

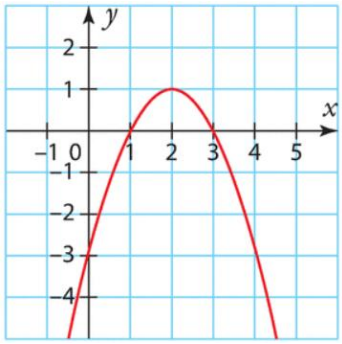


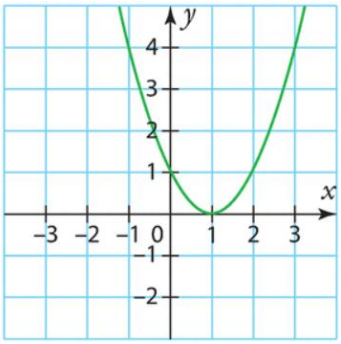
Donner l'expression de $f(x)$, celle de $g(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x dans l'intervalle $[0;20]$ l'aire du carré AMNP est-elle égale à celle du triangle CDN ?

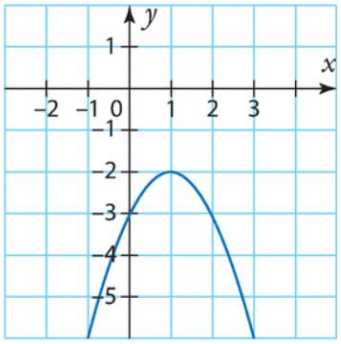
On note désormais $h(x)$ l'aire de la partie colorée constituée du carré AMNP et du triangle CDN. Pour quelle valeur de x dans l'intervalle $[0;20]$ cette aire sera-t-elle minimale ? Pourquoi ?

Position d'une parabole

Pour chacune des trois fonctions représentées ci-dessous, résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ et dresser le tableau de signe. Résoudre ensuite graphiquement l'inéquation $f(x)\geq 0$.

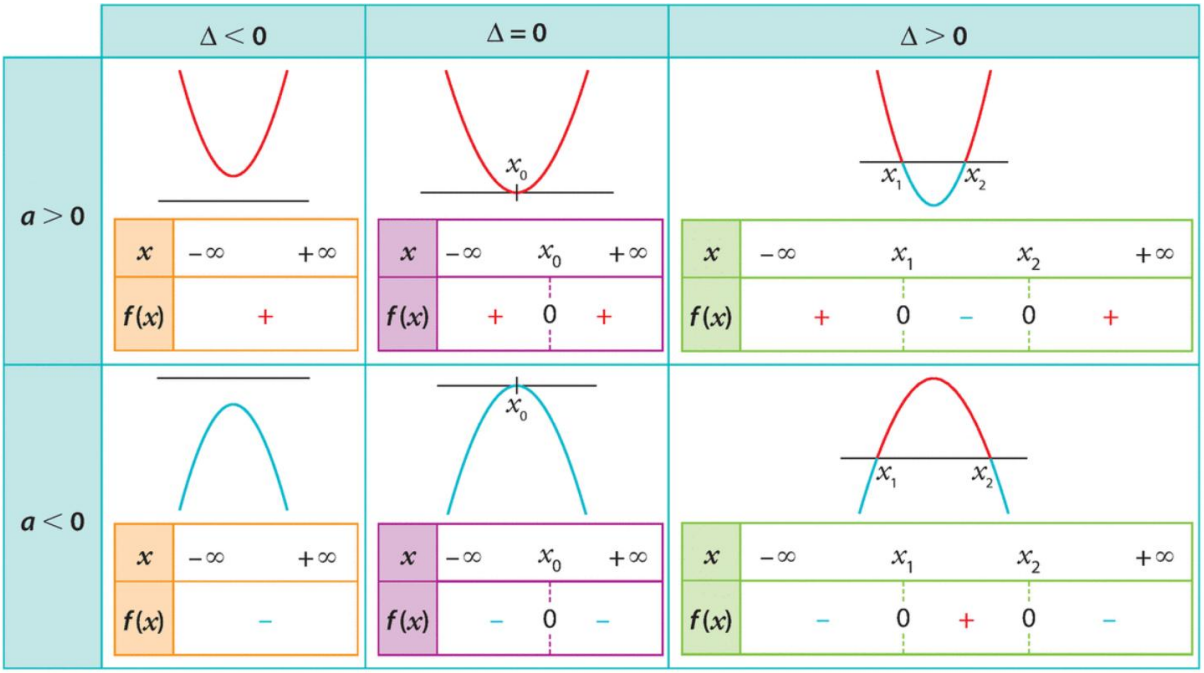






Signe d'un trinôme du second degré

Les tableaux proposés ci-dessous récapitulent le signe d'un trinôme en fonction du signe du coefficient a et du signe du discriminant Δ. Les représentations graphiques permettent de comprendre que ce signe dépend de la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses (deux intersections, une intersection, aucune intersection) mais aussi de l'orientation de la parabole (branches tournées vers le haut, branches tournées vers le bas). Ces tableaux sont à la base de la résolution des inéquations du second degré.



Résolution d'une inéquation du second degré

Résoudre les quatre inéquations proposées ci-dessous. La résolution se basera sur la mise en place préalable puis la lecture du tableau de signes de chaque trinôme.

$-2x^2+6x-4\geq 0$ | $2x^2-4x-16\geq 0$ | $2x^2-5x+6\geq 0$ | $-2x^2+3x-6\geq 0$