Définition Fonction polynôme de degré 2

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2 s'il existe des réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Remarque Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée fonction trinôme du second degré.

Propriété et définition Forme canonique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Il existe deux nombres réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Cette écriture est la forme canonique de f.

Propriété Sens de variation et représentation graphique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		↘	$\beta = f(\alpha)$	↗	

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et f admet comme minimum β en α.

Si $a < 0$

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		↗	$\beta = f(\alpha)$	↘	

f est strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et f admet comme maximum β en α.

Définition Équation du second degré

Une équation du second degré à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

Définition Racines

Les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Définition Discriminant

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Il est noté Δ.

Propriété Résolution dans $\mathbb{R}$

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

On dit que x_0 est racine double du trinôme.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Propriété Somme et produit des racines

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif.

f a alors deux racines distinctes x_1 et x_2 et on a $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Propriété Factorisation d'un trinôme

Soit f un trinôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les deux racines de f.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 la racine double de f.
- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas écrire $f(x)$ comme un produit de polynômes de degré 1.

Propriété Signe d'un trinôme

Soit f un trinôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

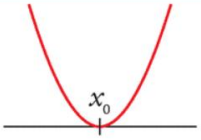
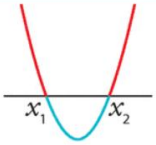
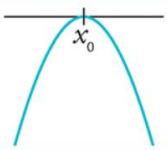
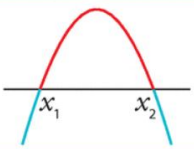
- Si $\Delta < 0$, alors, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, alors, pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, $f(x)$ est du signe de a et $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$.
- Si $\Delta > 0$, alors :

si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
	x : $-\infty$; $+\infty$ $f(x)$: $+$	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ $f(x)$: $+$; 0 ; $+$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ $f(x)$: $+$; 0 ; $-$; 0 ; $+$
$a < 0$			
	x : $-\infty$; $+\infty$ $f(x)$: $-$	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ $f(x)$: $-$; 0 ; $-$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ $f(x)$: $-$; 0 ; $+$; 0 ; $-$