Définition Probabilité conditionnelle

$p_A(B)$ désigne la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A est réalisé. On dit que c'est une **probabilité conditionnelle.**

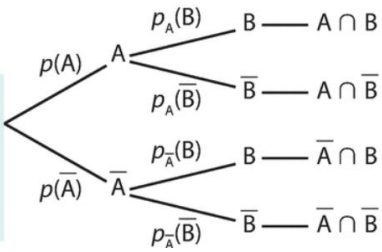
Propriété Probabilité conditionnelle et intersection

On a, de manière équivalente, $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ et $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Propriété Arbre pondéré et règle du produit

Soit A tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\overline{A}) \neq 0$.

Dans l'**arbre pondéré** ci-contre, les probabilités des événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ peuvent être obtenues en multipliant entre-elles les probabilités écrites sur les branches qui « mènent » à l'événement.



Propriété Arbre pondéré et partition

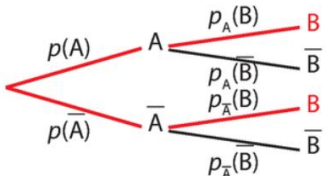
On peut construire des arbres pondérés avec plus de deux branches partant d'un même nœud tant que tous les événements « reliés à un même nœud » forment une partition de l'univers.

Propriété Formule des probabilités totales (cas particulier)

Soit A tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\overline{A}) \neq 0$.

La probabilité de B est donnée par la formule $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.

Remarque Sur un arbre pondéré, on peut comprendre la formule des probabilités totales comme le fait que l'on additionne les probabilités $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ et $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$ associées aux « chemins » pour lesquels B est réalisé, représentés en rouge sur l'arbre ci-contre.



Propriété Formule des probabilités totales (cas général)

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'une part et $B_1, B_2, \ldots, B_m$ d'autre part formant deux partitions de l'univers.

Pour i entier entre 1 et m, la probabilité de B_i est donnée par la formule :

$p(B_i) = p(A_1 \cap B_i) + p(A_2 \cap B_i) + \ldots + p(A_n \cap B_i) = p(A_1) \times p_{A_1}(B_i) + p(A_2) \times p_{A_2}(B_i) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B_i)$.

Définition Indépendance de deux événements

On dit que A et B sont indépendants si $p(B) = p_A(B)$.

Remarques

- Concrètement, cela veut dire que le fait que A soit réalisé n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de B.
- De manière symétrique, on a alors également $p(A) = p_B(A)$.

Propriété Indépendance et intersection

A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.