Croissance d'un cheveu

Au début de l'année, les cheveux d'une personne mesurent 10 centimètres. Chaque mois, les cheveux de cette personne poussent régulièrement de 9 millimètres. On note $l_0 = 10$. Pour tout $n \geq 1$, on désigne par l_n la longueur des cheveux de cette personne au bout du $n^{ième}$ mois.

1. Calculer l_1, l_2 et l_3.
2. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n.
3. On dit que les nombres l_0, l_1, l_2, l_3, …, l_n .constituent les termes successifs d'une suite arithmétique dont vous préciserez le premier terme ainsi que la raison.
4. Donner l'expression de l_n en fonction de n.
5. Quelle sera la longueur des cheveux de cette personne au bout d'un an ?

Une balle qui rebondit

Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 centimètres au-dessus du sol. A chaque rebond, la balle remonte aux $9/10$ de la hauteur atteinte précédemment. On note $h_0 = 100$. Pour tout $n \geq 1$, on désigne par h_n la hauteur en centimètres atteinte à l'issue du $n^{ième}$ rebond.

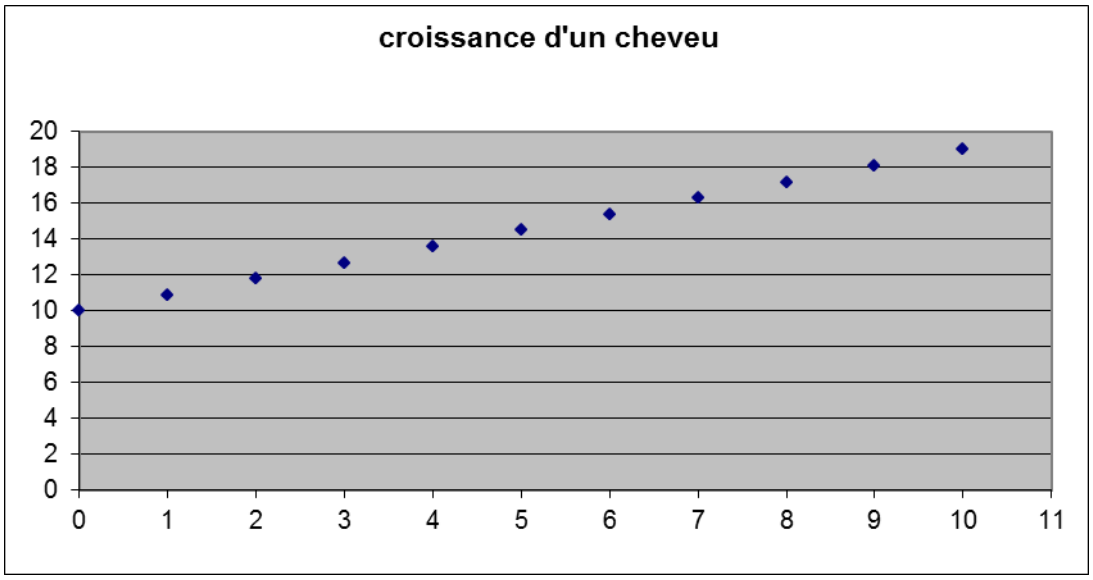
1. Calculer h_1, h_2 et h_3.
2. Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
3. On dit que les nombres h_0, h_1, h_2, h_3, …, h_n .constituent les termes successifs d'une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme ainsi que la raison.
4. Donner l'expression de h_n en fonction de n.
5. A quelle hauteur sera la balle au 12ème rebond ?

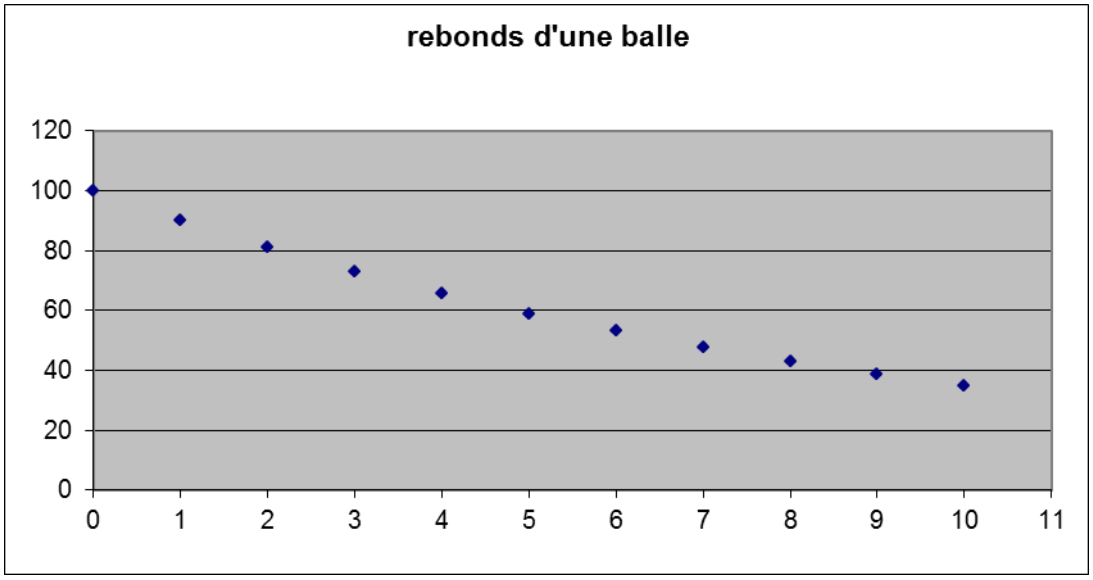
Evolution d'une population de bactéries

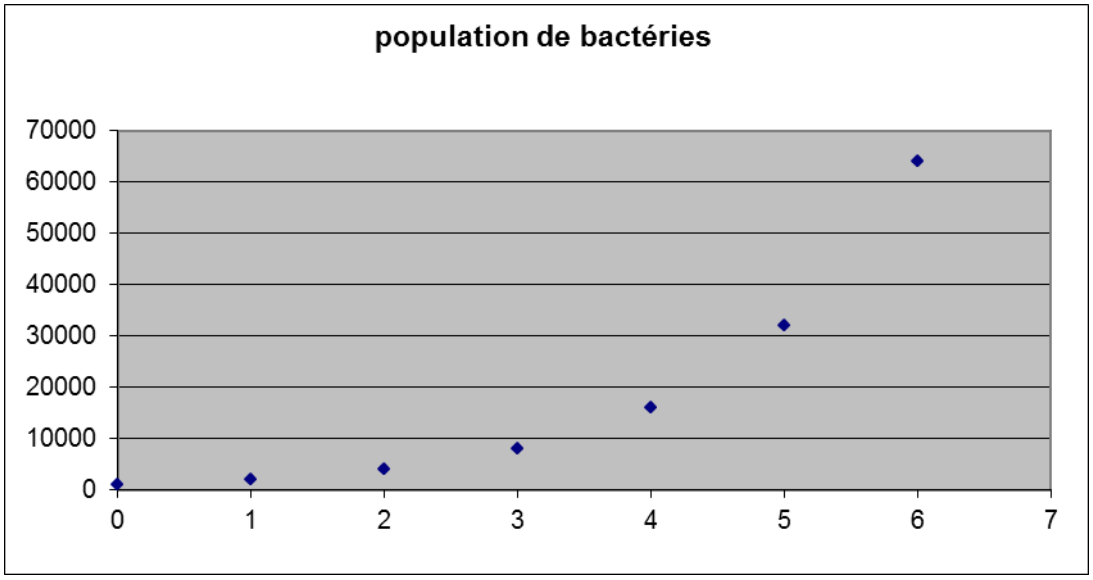
Un biologiste souhaite étudier l'évolution d'une population de 1000 bactéries. Pour pratiquer des prévisions le biologiste modélise l'évolution en affirmant que : « la population double toutes les 20 minutes ». On note p_0 la population initiale un matin à 10h, p_1 la population à 10h20, et ainsi de suite.

1. Comment peut-on « noter » la population à 11h ? La population à 12h ? La population à 14h ? Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. Exprimer p_n en fonction de n.
2. Déterminer la population de bactéries à 11h, à 12h et à 14h. Il revient le lendemain à 10h, estimez la population alors relevée.

Trois nuages de points



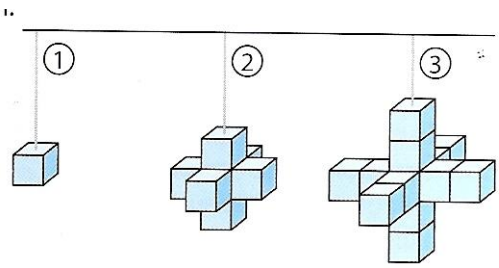




Nature d'une suite, premier terme et raison

On note $u_0 = 50$ la taille de la plus grande des 8 poupées russes proposées ci-contre (exprimée en centimètres). Sachant que la taille d'une poupée est égale aux trois cinquièmes de la poupée précédente, quel terme de la suite (u_n) permettra de calculer la taille de la 8ème poupée ? Quelle sera cette taille (arrondie au millimètre) ?

On note $v_0 = 1$ le nombre de cube nécessaire pour construire le premier des trois mobiles proposés ci-contre. En observant attentivement le deuxième et le troisième, quel terme de la suite (v_n) permettra de déterminer le nombre de cubes nécessaires pour construire le 8ème mobile ? Quel sera ce nombre de cubes ?



Dans les deux cas proposés ci-dessus précisez la nature de la suite, sa raison et son premier terme, mais aussi la relation de récurrence et l'expression du terme général.

Nature d'une suite, premier terme et raison, encore…

Pour chacune des deux suites proposées ci-dessous, trouver le terme manquant, déterminer la nature de la suite, préciser sa relation de récurrence (c'est-à-dire u_{n+1} en fonction de u_n) et l'expression de son terme général (c'est-à-dire u_n en fonction de n).

1. Suite (u_n) : $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 9$, $u_3 = 13$, $u_4 = 17$, $u_5 = ?$
2. Suite (v_n) : $v_0 = 2$, $v_1 = 6$, $v_2 = 18$, $v_3 = 54$, $v_4 = 162$, $v_5 = ?$

Dans chacun des cas proposés ci-dessous, déterminer la nature de la suite, préciser l'expression de son terme général et déterminer les 6 premiers termes.

3. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$.
4. La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = v_n + 5 \end{cases}$.

Dans chacun des cas proposés ci-dessous, déterminer la nature de la suite, préciser sa relation de récurrence et déterminer les 6 premiers termes.

5. La suite (u_n) est définie par $u_n = 5 + 0,2n$.
6. La suite (v_n) est définie par $v_n = 1000 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Nature d'une suite, premier terme et raison, toujours…

Situation 1

U_n est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison R.

Sachant que $U_0 = -2$ et $R = 3$ calculer U_4. Sachant que $U_2 = 1$ et $R = 2$ calculer U_4. Sachant que $U_1 = -5$ et $U_2 = 2$ calculer R. Sachant que $U_0 = -3$ et $U_1 = 2$ calculer U_2. Sachant que $U_4 = 2$ et $U_5 = 5$ calculer U_6. Sachant que $U_4 = 6$ et $U_5 = 9$ calculer U_7. Sachant que $U_0 = 3$ et $U_1 = 13$ calculer U_7. Sachant que $U_8 = 12$ et $R = -2$ calculer U_7. Sachant que $U_0 = -5$ et $R = 1$ calculer U_7. Sachant que $U_4 = -5$ et $U_6 = 5$ calculer U_7.

Situation 2

V_n est une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison Q.

Sachant que $V_2 = -4$ et $Q = 3$ calculer V_3. Sachant que $V_1 = 5$ et $V_2 = 2$ calculer Q. Sachant que $V_0 = 1000$ et $V_1 = 1050$ calculer V_2. Sachant que $V_0 = 3$ et $Q = 4$ calculer V_3. Sachant que $V_2 = -4$ et $Q = -2$ calculer V_3. Sachant que $V_1 = 2$ et $V_2 = 3$ calculer V_3. Sachant que $V_0 = 3$ et $V_1 = 6$ calculer V_3. Sachant que $V_0 = 100$ et $V_1 = 20$ calculer V_3.

Vers une approche plus « algorithmique » des choses

Situation 1

Une dune mesure 100 mètres de large en 2023. Une équipe scientifique constate que chaque année, la largeur de cette dune augmente de 1,5 mètre par an par accumulation de sable sous l'action des marais et du vent. On note L_n la largeur de la dune en $2023+n$.

1. Déterminer l'expression du terme général L_n en fonction de n.
2. Par la résolution d'une inéquation, déterminer à partir de quelle année la largeur de la dune aura doublé.
3. Recopier et compléter l'algorithme proposé ci-contre afin qu'il permette de retrouver en sortie le résultat précédent.

$L \leftarrow 100$
$n \leftarrow 0$
Tant que ...
  $L \leftarrow ...$
  $n \leftarrow ...$
Afficher ...

Situation 2

Une ville compte 5000 habitants en 2023. Elle voit sa population augmenter de 3,5% par an. On note P_n le nombre d'habitants de cette ville en $2023+n$.

4. Déterminer l'expression du terme général P_n en fonction de n.
5. A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population de cette ville aura doublé.
6. Recopier et compléter l'algorithme proposé ci-contre afin qu'il permette de retrouver en sortie le résultat précédent.

$P \leftarrow 5000$
$n \leftarrow 0$
Tant que ...
  $P \leftarrow ...$
  $n \leftarrow ...$
Afficher ...

Suites arithmétiques et pensée algorithmique

Une ville de 3000 habitants voit sa population augmenter de 300 habitants chaque année. Une zone rurale de 6000 habitants voit sa population diminuer de 400 habitants chaque année.

On note u_n la population de la ville et v_n la population de la zone rurale au bout de n années. Ainsi $u_0 = 3000$ et $v_0 = 6000$.

1. Calculer u_1, u_2. Calculer v_1 et v_2.
2. Déterminer la nature de chaque suite. Préciser le 1er terme et la raison.
3. Déterminer l'expression du terme général de chaque suite.

$U \leftarrow ...$
$V \leftarrow ...$
$n \leftarrow ...$
Tant que ...
  $U \leftarrow ...$
  $V \leftarrow ...$
  $n \leftarrow ...$
Afficher ...

4. On cherche à déterminer au bout de combien d'années la population de la ville dépassera celle de la zone rurale. Pour cela on utilise l'algorithme proposé ci-dessus en langage libre dont certaines lignes ont été partiellement effacées. Recopier et compléter les lignes incomplètes de l'algorithme afin qu'il apporte une réponse.
5. Par résolution d'une inéquation, déterminer la valeur qui sera affichée par cet algorithme.

Suites géométriques et pensée algorithmique

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 140 décibel. Pour l'isoler, on dispose de plaques d'isolation phonique qui absorbent un quart de l'intensité du son. Par conséquent, une plaque laisse passer les trois quarts de l'intensité sonore. On note w_n l'intensité du son après la traversée de n plaques d'isolation phonique. Ainsi $w_0 = 140$.

1. Calculer w_1 et w_2.
2. Déterminer la nature de cette suite. Préciser le premier terme et la raison.
3. Déterminer l'expression du terme général de cette suite.

On considère que le niveau sonore est acceptable lorsque son intensité sonore est inférieure à 40 dB.

$W \leftarrow ...$
$n \leftarrow ...$
Tant que ...
  $W \leftarrow ...$
  $n \leftarrow ...$
Afficher ...

4. On cherche à déterminer combien de plaques on doit installer pour que le niveau sonore soit acceptable. Pour cela on utilise l'algorithme proposé ci-dessus dont certaines lignes ont été partiellement effacées. Recopier et compléter les lignes incomplètes de l'algorithme afin qu'il apporte une réponse.
5. En utilisant votre calculatrice, déterminer la valeur qui sera affichée par cet algorithme.

Suites arithmétiques et géométriques et pensée algorithmique

On souhaite comparer deux placements :

- Placement X : dépôt initial de 500 euros et un versement annuel de 10 euros,
- Placement Y : dépôt initial de 400 euros et un versement annuel de 5% du capital.

On note x_n (respectivement y_n) le capital obtenu sur le placement X (respectivement sur le placement Y) après n années de versements.

On note $x_0 = 500$ et $y_0 = 400$.

1. Calculer x_1, x_2, y_1 et y_2.
2. Déterminer la nature de chaque suite. Préciser le premier terme et la raison.
3. Déterminer l'expression du terme général de chaque suite.

$X \leftarrow ...$
$Y \leftarrow ...$
$n \leftarrow ...$
Tant que ...
  $X \leftarrow ...$
  $Y \leftarrow ...$
  $n \leftarrow ...$
Afficher ...

4. On souhaite déterminer au bout de combien d'années le capital obtenu sur le placement Y devient supérieur au capital obtenu sur le placement X. Pour cela on utilise l'algorithme proposé ci-dessus dont certaines lignes ont été partiellement effacées. Recopier et compléter les lignes incomplètes de l'algorithme afin qu'il apporte une réponse.
5. En utilisant votre calculatrice, déterminer la valeur qui sera affichée par cet algorithme.

Un exercice d'application directe

L'économiste britannique Thomas Robert Malthus est connu pour ses travaux sur le rapport entre l'accroissement de la population et celui de la nourriture. En1798 il publie un essai sur le principe de population d'où sont extraites les informations suivantes.

- En 1800, l'Angleterre compte 8 millions d'habitants. La population de l'Angleterre suit une **progression géométrique** en augmentation de 2,8% par an,
- En 1800, l'agriculture anglaise permet de nourrir 10 millions d'habitants. Son amélioration permet de nourrir 400000 habitants supplémentaires par an suivant une **progression arithmétique**.

1. En 1825, selon ce modèle, l'agriculture anglaise pouvait-elle couvrir les besoins de sa population ? Justifier clairement votre réponse.
2. En 1850, selon ce modèle, l'agriculture anglaise pouvait-elle couvrir les besoins de sa population ? Justifier clairement votre réponse.
3. On souhaite déterminer l'année à partir de laquelle l'agriculture anglaise ne pouvait plus, suivant ce modèle, répondre aux besoins en nourriture de la population. Comment faire ?

La notion de suite auxiliaire

Une suite auxiliaire est une suite numérique construite à partir d'une autre suite numérique et qui a des propriétés que l'autre n'a pas. Dans les situations que nous allons étudier, la suite auxiliaire pourra être parfois arithmétique, parfois géométrique. Elle sera utile dans l'objectif de déterminer l'expression général de la suite numérique étudiée qui sera, elle, ni arithmétique, ni géométrique…

Attention, deux points méthodes

Dans ce gente de situation il sera nécessaire de maîtriser et de savoir faire intervenir les deux points méthodes suivants, chacun d'entre étant basé sur les définitions respectives de suite arithmétique et suite géométrique.

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il faut démontrer que la différence $u_{n+1}-u_n$ ne dépend pas de n, c'est-à-dire que la différence $u_{n+1}-u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite arithmétique.

- Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il faut démontrer que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ne dépend pas de n, c'est-à-dire que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant. Cette constante est alors la raison de la suite géométrique.

Attention, deux formules

Il est important d'avoir réalisé les deux formules suivantes qui généralisent les expressions du terme général (on dit aussi formule explicite) des suites arithmétiques et géométriques. Soyez attentifs aux similitudes et différences qui les caractérisent.

- Toute suite numérique arithmétique de premier terme u_0 et de raison r a pour expression du terme général $u_n = u_0 + r \times n$.

- Toute suite numérique géométrique de premier terme v_0 et de raison q a pour expression du terme général $v_n = v_0 \times q^n$.

Un premier exercice d'application

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n}{4+u_n}$.

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = \frac{4}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont vous déterminerez le premier terme et la raison.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n), c'est-à-dire l'expression de u_n en fonction de n.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	1	4
3	1	0,8	5
4	2	0,67	6
5	3	0,57	7
6	4	0,50	8
7	5	0,44	9
8	6	0,40	10
9	7	0,36	11
10	8	0,33	12
11	9	0,31	13
12	10	0,29	14
13	11	0,27	15
14	12	0,25	16

Un deuxième exercice d'application

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$. La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n - n - 1$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont vous déterminerez le premier terme et la raison.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n), c'est-à-dire l'expression de u_n en fonction de n.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	3	2
3	1	12	10
4	2	53	50
5	3	254	250
6	4	1255	1250
7	5	6256	6250
8	6	31257	31250
9	7	156258	156250
10	8	781259	781250
11	9	3906260	3906250
12	10	19531261	19531250

La loi de Newton et ses conséquences

La loi de Newton (refroidissement ou réchauffement) stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant. On modélise donc la loi de Newton entre deux instants consécutifs par l'égalité suivante $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante de proportionnalité négative et M est la température du milieu environnant. Par équivalence on a la relation de récurrence suivante $T_{n+1} = (1+k)T_n - kM$ qui se généralise en une relation du type affine $T_{n+1} = \alpha \times T_n + \beta$.

Un premier exercice d'application

On considère qu'à la sortie du four la température du gâteau est de 180°C et que celle de l'air ambiant est de 20°C. La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température par la suite (T_n) définie par : $\begin{cases} T_0 = 180 \\ T_{n+1} = 0,85T_n + 3 \end{cases}$ où T_n est la température au bout de n minutes.

1. On considère la suite auxiliaire définie par $u_n = T_n - 20$. Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite (T_n). Combien de temps doit-on attendre pour manger ce gâteau lorsqu'il a une température inférieure à celle du corps ?

Un deuxième exercice d'application

Des gâteaux sortent du congélateur à $-19°C$. On les pose dans une pièce où la température ambiante est de $25°C$. La loi de réchauffement de Newton permet de modéliser la température par la suite (T_n) définie par : $\begin{cases} T_0 = -19 \\ T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5 \end{cases}$ où T_n est la température au bout de n minutes.

1. On considère la suite auxiliaire définie par $u_n = T_n - 25$. Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite (T_n). Combien de temps doit-on attendre pour manger ces gâteaux lorsqu'ils auront une température d'au moins 10°C ?

Sens de variation d'une suite

Suite croissante

On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** lorsque : $\boxed{u_{n+1} \geq u_n \text{ pour tout } n}$.

Suite décroissante

On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** lorsque : $\boxed{u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n}$.

Attention, point méthode

- Si la différence $u_{n+1} - u_n$ est positive alors la suite est croissante,
  Cette implication se base sur l'équivalence suivante : $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$

- Si la différence $u_{n+1} - u_n$ est négative alors la suite est décroissante,
  Cette implication se base sur l'équivalence suivante : $u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$

Des exercices d'application directe

Etudier le sens de variation des suites en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- $u_n = n^2$
- $v_n = n^3$
- $w_n = \dfrac{1}{n+1}$
- $x_n = \dfrac{n}{n+1}$
- $y_n = 1,4^n$
- $z_n = 0,8^n$
- $s_n = -2 \times 0,9^n$
- $t_n = -10 \times 1,05^n$

Quelques exemples un peu plus concrets

Une population de 30000 habitants augmente de 5% par an du fait de l'accroissement naturel et diminue de 1100 habitants du fait de l'émigration. On modélise l'évolution par la suite (p_n), préciser son premier terme et sa relation de récurrence. On considère la suite auxiliaire (u_n) définie par $u_n = p_n - 22000$, démontrer qu'elle est géométrique, préciser son premier terme et sa raison. En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n) et étudier ses variations.

Une population de 100000 habitants diminue de 5% par an du fait de l'émigration et augmente de 4000 habitants du fait de l'immigration. On modélise l'évolution par la suite (q_n), préciser son premier terme et sa relation de récurrence. On considère la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = p_n - 80000$, démontrer qu'elle est géométrique, préciser son premier terme et sa raison. En déduire l'expression du terme général de la suite (q_n) et étudier ses variations.

8000 clients sont venus faire des achats dans un magasin. Chaque mois, on constate que 70% sont restés fidèles et qu'il y a 3000 nouveaux clients. On modélise l'évolution par la suite (c_n) dont vous préciserez le premier terme et la relation de récurrence. On considère la suite auxiliaire (w_n) définie par $w_n = c_n - 10000$, démontrer qu'elle est géométrique, préciser son premier terme et sa raison. En déduire l'expression du terme général de la suite (c_n) et étudier ses variations.

Une suite définie par récurrence, deux algorithmes et une suite auxiliaire

Une entreprise de téléphonie mobile constate chaque année une déperdition de 16% de sa clientèle. Ce taux est appelé, en langage technique, « taux d'attrition » ou encore « taux de churn ». Ce taux mesure, au cours d'une période donnée, la proportion de clients qui choisissent de quitter l'opérateur téléphonique pour rejoindre un autre opérateur qu'ils estiment plus attractif.

Par ailleurs, cette entreprise sait que les campagnes publicitaires lui amènent chaque année 100000 abonnés supplémentaires. Elle sait également qu'en 2025, elle compte 400000 abonnés.

Afin de réaliser une étude prospective à long terme de l'évolution du nombre d'abonnés de cet opérateur téléphonique, on étudie la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 400000 \\ u_{n+1} = 0,84 \times u_n + 100000 \end{cases}$$

On donne ci-contre les premiers termes de la suite (u_n) arrondis à l'unité.

u0	400 000
u1	436 000
u2	466 240
u3	491 642
u4	512 979
u5	530 902
u6	545 958
u7	558 605
u8	569 228
u9	578 151
u10	585 647
u11	591 944
u12	597 233
u13	601 675
u14	605 407
u15	608 542
u16	611 175
u17	613 387
u18	615 245
u19	616 806
u20	618 117

On donne ci-dessous deux algorithmes écrits en langage Python et on rappelle que l'instruction « round(a,0) » arrondit la valeur numérique contenue dans la variable « a » à l'unité près.

```
def algorithme1(n):
    l=[]
    a=400000
    for i in range(n):
        l.append(round(a,0))
        a=0.84*a+100000
    return(l)
```

```
def algorithme2(s):
    n=0
    a=400000
    while a<s:
        n=n+1
        a=0.84*a+100000
    return(2025+n)
```

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - 625000$.

1. Que va renvoyer l'instruction « algorithme1(3) » saisie dans une console Python ? Il n'est pas demandé de justifier cette réponse.

2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.

3. En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n).

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. Que va renvoyer l'instruction « algorithme2(600000) » saisie dans une console Python ? Il n'est pas demandé de justifier cette réponse.

6. Comment interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

Attention ! Démonstration…

La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Le but de l'activité est de démontrer cette formule.

La somme des entiers consécutifs

Un travail préliminaire consiste à sommer dans un sens puis dans l'autre tous les entiers de 1 à n pour obtenir le double de la somme que l'on divise ensuite par deux.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{\text{n fois}}$$

$$2S = n \times (n+1)$$

$$\boxed{S = \frac{n \times (n+1)}{2}}$$ **Cette formule est à connaitre**

Démonstration de la formule générale (dans le programme de première, elle n'est pas à connaitre)

On somme les termes d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$u_0 + \underbrace{u_0 + 1 \times r}_{u_1} + \underbrace{u_0 + 2 \times r}_{u_2} + \ldots + \underbrace{u_0 + n \times r}_{u_n}$$

On réorganise cette somme en regroupant les premiers termes entre eux, les raisons entre elles.

$$\underbrace{u_0 + u_0 + u_0 + \ldots + u_0}_{\text{n+1 fois}} + 1 \times r + 2 \times r + \ldots + n \times r$$

On compte alors le nombre de premiers termes ainsi que le nombre de raisons.

$$(n+1) \times u_0 + (1 + 2 + \ldots + n) \times r$$

La somme des entiers de 1 à n a déjà été calculée dans le travail préliminaire.

$$(n+1) \times u_0 + \frac{n \times (n+1)}{2} \times r$$

La quantité $(n+1)$ constitue alors un facteur commun.

$$(n+1) \times u_0 + (n+1) \times \frac{n \times r}{2}$$

$$(n+1) \times \left[u_0 + \frac{n \times r}{2} \right]$$

La mise au même dénominateur

$$(n+1) \times \left[\frac{2 \times u_0}{2} + \frac{n \times r}{2} \right]$$

fait apparaître deux u_0

$$(n+1) \times \left[\frac{u_0 + u_0 + n \times r}{2} \right]$$

que nous séparons

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{Nombre de termes}} \times \left[\frac{\overbrace{u_0}^{\text{Premier terme}} \quad \overbrace{+ u_0 + n \times r}^{\text{Dernier terme}}}{2} \right]$$

afin de reconnaître la formule proposée…

$$\boxed{(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Attention ! Démonstration…

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{(\text{premier terme}) \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$$

Le but de l'activité est de démontrer cette formule.

La somme des puissances consécutives

On considère la somme les termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q. $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$

On multiplie cette somme par $(1-q)$ $S \times (1-q) = \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right) \times (1-q)$

et on développe le membre de droite $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n - q - q^2 - \ldots - q^n - q^{n+1}$

afin d'éliminer les termes opposés $1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \ldots + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \ldots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$

On obtient donc l'égalité suivante … $S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$

On en déduit l'égalité… $\boxed{S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ **Cette formule est à connaitre**

Démonstration de la formule générale (dans le programme de première, elle n'est pas à connaitre)

On somme les termes d'une suite géométrique de premier terme v_0 *et de raison* q *dans laquelle* v_0 *est un facteur commun.* $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$v_0 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 + \ldots + v_0 \times q^n$

$v_0 \times \left[1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right]$

La somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q est connue $v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

la formule proposée… $\boxed{(\text{premier terme}) \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$

Deux exercices d'application directe

1. Les VHF (voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient une nuit volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara : « le moins gradé en prendra un, celui du grade immédiatement supérieur en prendra deux, celui du troisième grade en prendra trois et ainsi de suite. » Cependant les voleurs se révoltèrent contre cette injustice : « nous en prendrons cinq chacun dit le plus audacieux. » Et ainsi fut fait. Combien d'appareils les VHF avaient-ils volés ?

2. La légende du jeu d'échec : le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains de blé sur la deuxième, quatre grains de blé sur la troisième, huit grains de blé sur la quatrième, et ainsi de suite jusqu'à la 64ème case. Le roi sourit de la modestie de cette demande. Avait-il raison de sourire ? On calculera pour répondre à cette question le nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

D'autres exercices d'application directe

Associer à chaque somme proposée dans la colonne de gauche le résultat correspondant de la colonne de droite. Dans cet exercice il n'est pas demandé de justifier la réponse.

$1+2+3+\ldots+30$	465
$1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{10}$	3 280
$1+2+4+8+\ldots+2\,048$	4 095
$60+61+62+\ldots+99+100$	88 573

Calculer les sommes proposées ci-contre. Détailler la méthode.

a) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 15$ **b)** $S = 1 + 2 + \ldots + 7$

c) $S = 8 + 9 + \ldots + 15$ **d)** $S = 7 + 8 + \ldots + 50$

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

b) $50 + 51 + \ldots + 100$

a) $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{12}$

b) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + 1\,024 - 2\,048$

Préparation physique

Laurent se met à la course à pied et se fixe un programme d'entrainement de vingt et une sorties pour préparer le semi-marathon : lors de la première sortie il court 1 kilomètre, lors de la deuxième sortie il court 2 kilomètres, et ainsi de suite jusqu'à la vingt et unième sortie où il court 21 kilomètres. Combien de kilomètres aura-t-il parcouru lors de sa préparation physique ?

Laurent décide de reprendre l'entrainement en se fixant l'objectif du marathon. Chaque dimanche, pendant vingt et une semaines supplémentaires, il court 22 kilomètres la première semaine, 23 kilomètres la semaine d'après et ainsi de suite jusqu'à la vingt et unième semaine où il court 42 kilomètres. Combien de kilomètres aura-t-il parcouru lors de sa préparation physique ?

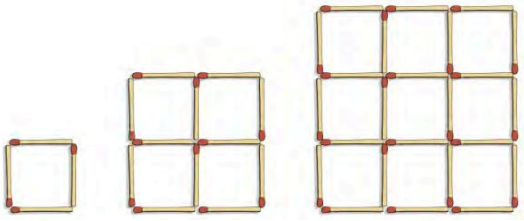
Diffusion d'une rumeur

Une rumeur se diffuse de la façon suivante : chaque jour une personne nouvellement informée, informe 5 autres personnes autour d'elle. Aujourd'hui je diffuse une rumeur. A ce rythme, à la fin de la semaine, c'est-à-dire au bout de 7 jours jours combien de personnes seront informées ?

Une rumeur se diffuse de la façon suivante : chaque jour une personne nouvellement informée, informe 2 autres personnes autour d'elle. Aujourd'hui je diffuse une rumeur. A ce rythme, à la fin du mois, c'est-à-dire au bout de 31 jours, combien de personnes seront-elles informées ?

Des carrès et des allumettes

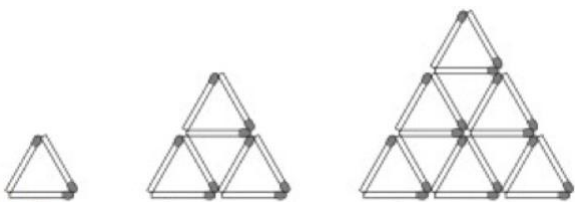
On propose ci-contre les premières étapes de la construction d'un quadrillage carré. Sauriez-vous déterminer le nombre total d'allumettes nécessaires pour construire l'étape 10 ?



Etape 1 *Etape 2* *Etape 3*

Des triangles et des allumettes

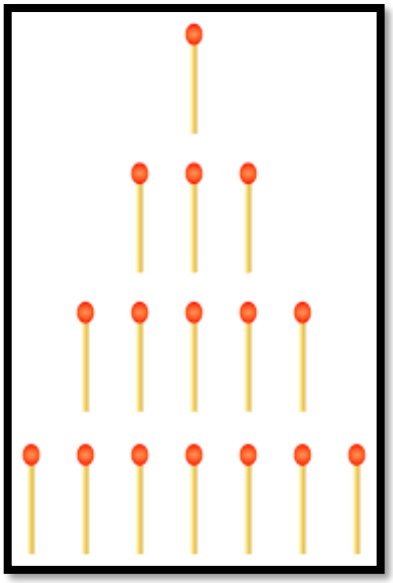
On propose ci-contre les premières étapes de la construction d'un quadrillage désormais triangulaire. Sauriez-vous déterminer le nombre total d'allumettes nécessaires pour construire l'étape 10 ?

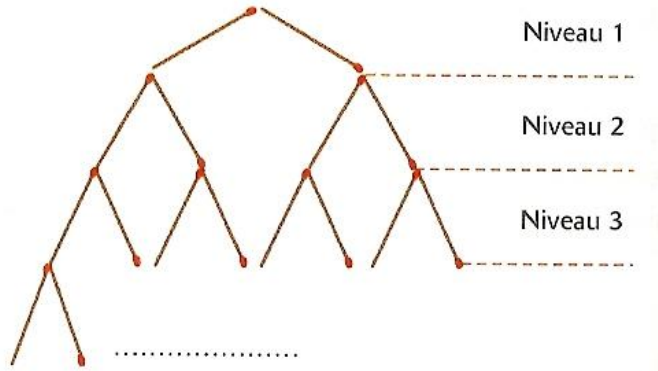


Etape 1 *Etape 2* *Etape 3*

Avec des allumettes, encore…

Ci-contre on a construit un motif à 4 niveaux avec des allumettes. A l'aide de la somme des termes d'une suite numérique, que vous préciserez, déterminer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire un motif à 10 étages.





Ci-dessus, on propose un motif à 3 niveaux, construit avec des allumettes. A l'aide de la somme des termes d'une suite numérique, que vous préciserez, déterminer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire un motif à 10 niveaux.

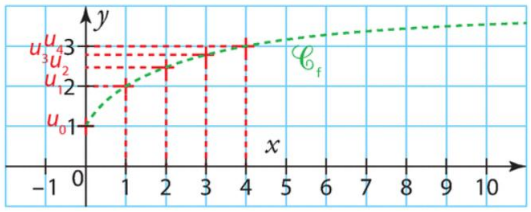
Un point sur la représentation graphique des suites numériques

Les suites numériques peuvent être définies de deux manières différentes : soit par une formule explicite (appelée aussi expression du terme général) soit par une formule de récurrence (toujours accompagnée de la valeur du premier terme). Ces deux façons de définir les suites engendrent deux façons de les représenter (valeurs soit sur l'axe des ordonnées soit sur l'axe des abscisses).

Suites définies par une **formule explicite**

$$u_n = f(n)$$

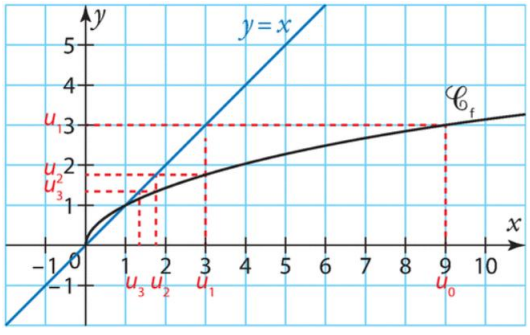
Le terme général s'exprime en fonction de l'indice du terme de la suite.



Suites définies par une **formule de récurrence**

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le terme suivant s'exprime en fonction du terme précédent. Dans ce cas il faut précise le terme initial, c'est-à-dire le premier terme.



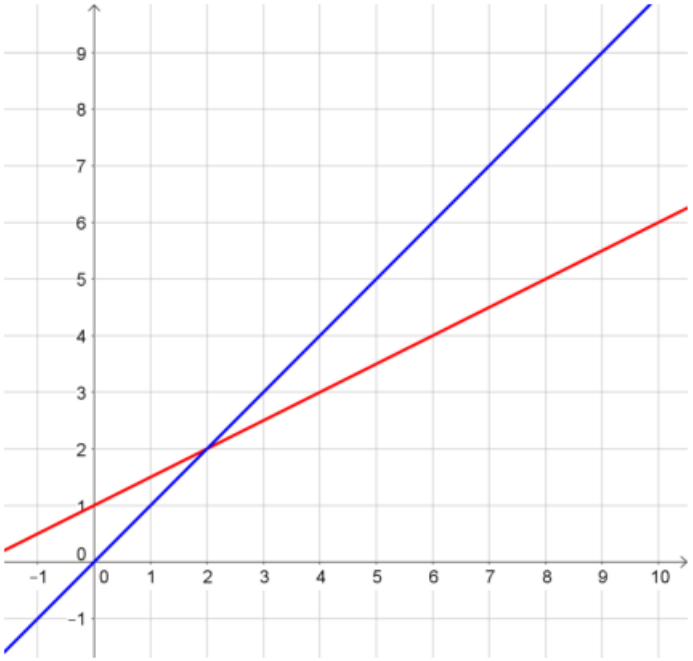
Dans le premier cas, le plus simple, on s'appuie sur la représentation graphique de la fonction qui donne l'expression du terme général. Dans le deuxième cas, plus élaboré, on s'appuie sur la représentation graphique de la fonction qui modélise la récurrence, le premier terme et $y = x$.

Une première situation

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

La fonction qui modélise la récurrence est $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$.

Représenter, sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite. Peut-on conjecturer le sens de variations et le comportement asymptotique de cette suite ?

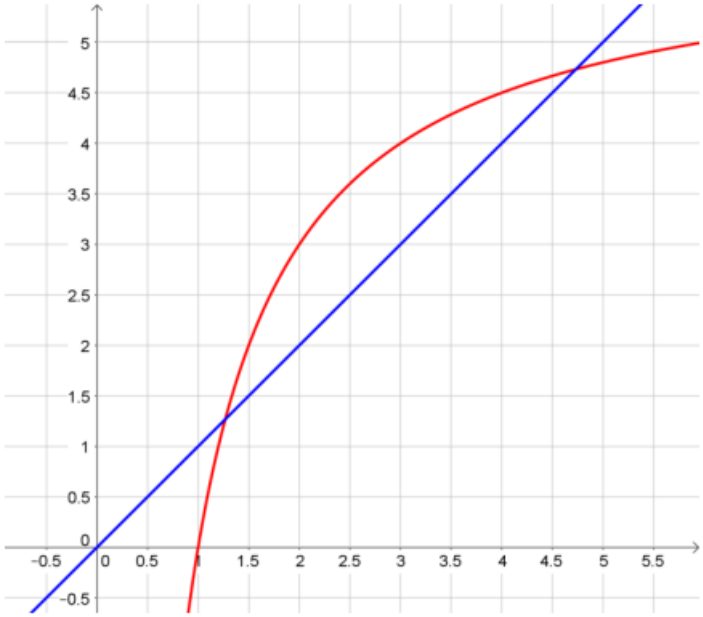


Une deuxième situation

$$\begin{cases} v_0 = 1,5 \\ v_{n+1} = 6 - \dfrac{6}{v_n} \end{cases}$$

La fonction qui modélise la récurrence est $g(x) = 6 - \dfrac{6}{x}$.

Représenter, sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite. Peut-on conjecturer le sens de variations et le comportement asymptotique de cette suite ?

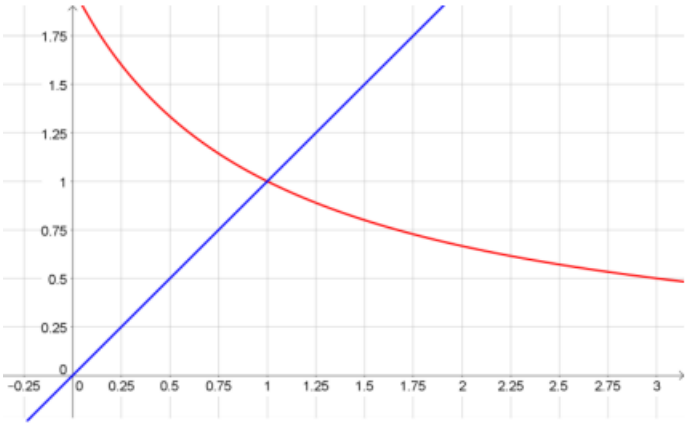


Une troisième situation

$$\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \dfrac{2}{w_n + 1} \end{cases}$$

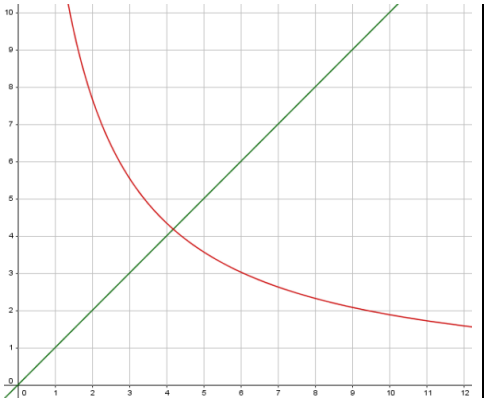
La fonction qui modélise la récurrence est $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

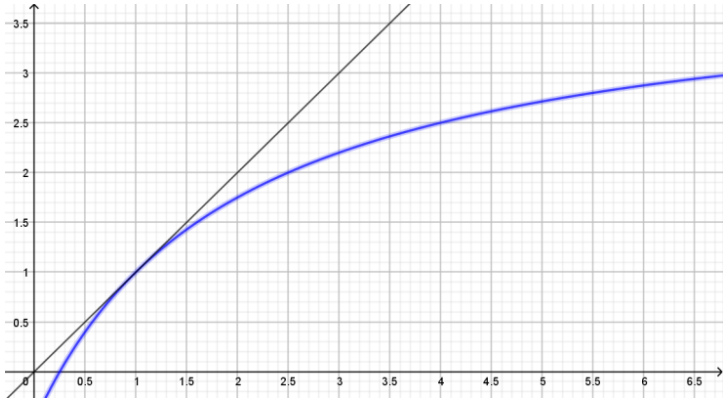
Représenter, sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite. Peut-on conjecturer le sens de variations et le comportement asymptotique de cette suite ?



Une quatrième et une cinquième situation

On a tracé à gauche une fonction f et à droite une fonction g. On a également tracé la droite d'équation $y=x$. On considère à gauche la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et à droite la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$. Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes des deux suites.





Définition par récurrence et représentation par nuage de points

Calculer puis représenter par un nuage de points les premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases}$$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

Calculer puis représenter par un nuage de points les premiers termes de la suite :

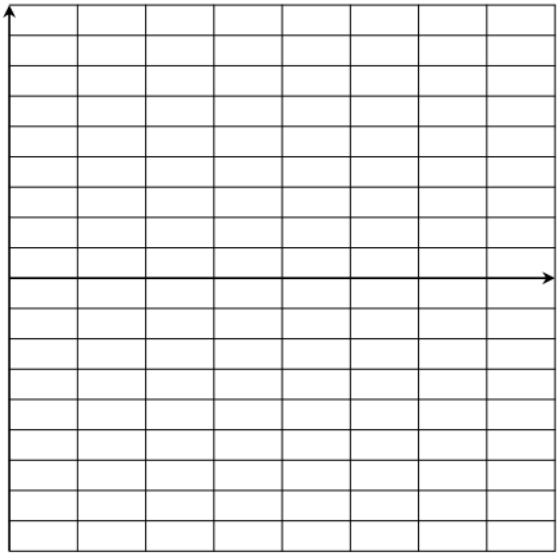
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases}$$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

Calculer puis représenter par un nuage de points les premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} u_0 = -8 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 4 \end{cases}$$

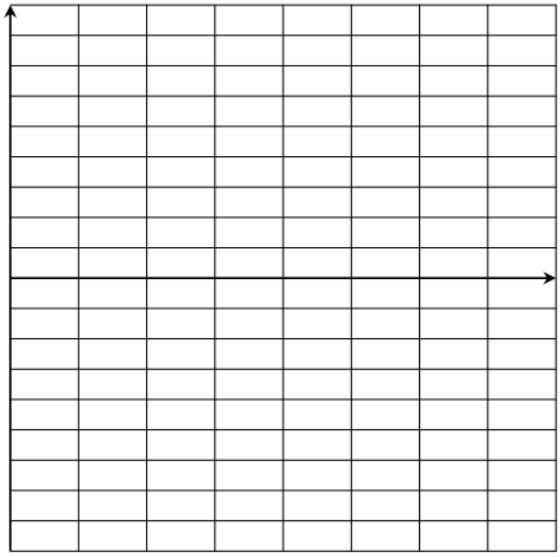
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8



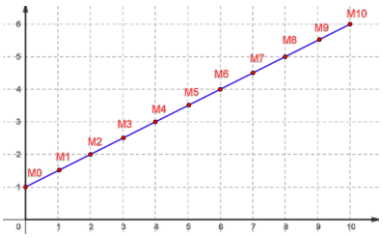
Calculer puis représenter par un nuage de points les premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = 0,5u_n - 4 \end{cases}$$

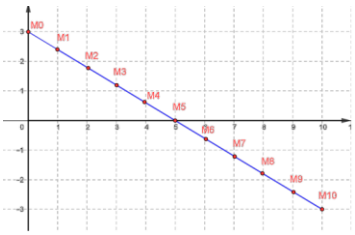
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8



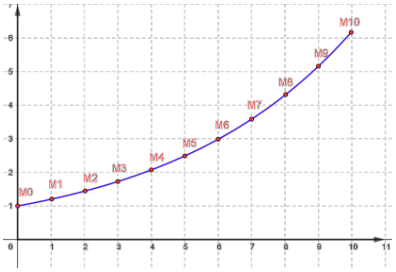
Définition par expression du terme général et nuage de points



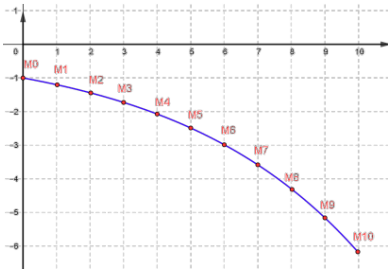
$u_n = 1 + 0,5n$



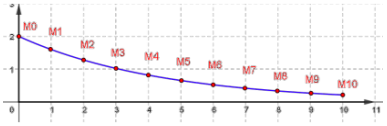
$v_n = 3 - 0,6n$



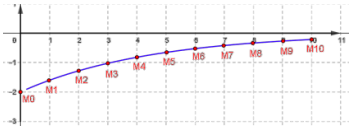
$w_n = 1,2^n$



$x_n = -1,2^n$



$y_n = 2 \times 0,8^n$



$z_n = -0,8^n$

Pour avoir d'autres exemples de ce type, consulter les graphiques des pages 3 et 4 des activités…