Définition Suite

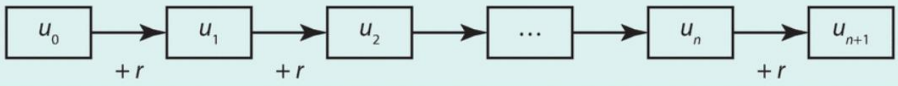
Une suite est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou sur un ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé (c'est-à-dire pour tous les entiers à partir d'un entier n_0), qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$, noté u_n.

Définition Suite définie par une relation de récurrence

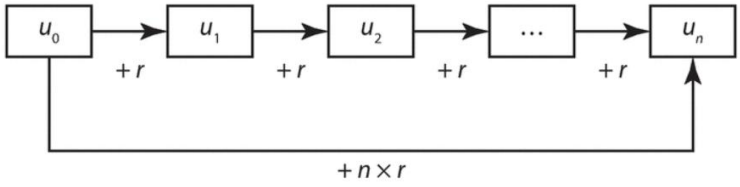
Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un ou plusieurs premiers termes et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.



Propriété Expression du terme général

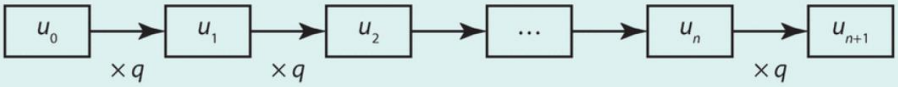
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

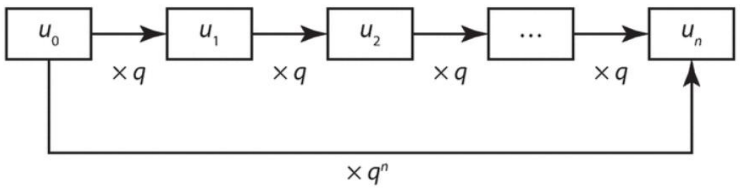
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

Définition Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.



Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.



Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Propriété Somme des n premiers entiers

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+2+\ldots+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

Propriété Somme de n premières puissances

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$

$S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$

En additionnant les deux égalités, on obtient :

$S + S = (1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n) + (1+n)$

$2 \times S = n \times (1+n)$

Donc $S = \dfrac{n\times(1+n)}{2}$.

$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$

$q \times S = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$

$S - q \times S = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \ldots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \ldots - q^{n+1}$

Donc $S - q \times S = 1 - q^{n+1}$.

$S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$

Comme $q \neq 1$, on a $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

Soit (u_n) une suite.

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite est strictement décroissante.

Propriété Comparaison entre $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$, donc la suite est strictement croissante.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} < u_n$, donc la suite est strictement décroissante.

Propriété Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite est constante.

Propriété Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- Si $q > 1$:
  - si $u_0 > 0$, alors la suite est strictement croissante.
  - si $u_0 < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$:
  - si $u_0 > 0$, alors la suite est strictement décroissante.
  - si $u_0 < 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors la suite est constante.

Règles Représentations graphiques

① Sur une **droite graduée**, on place les réels d'abscisses u_0 ; u_1 ; u_2 ; …

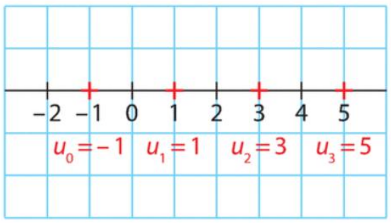
② Dans un **repère**, on place les points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

③ Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe représentative de la fonction f.

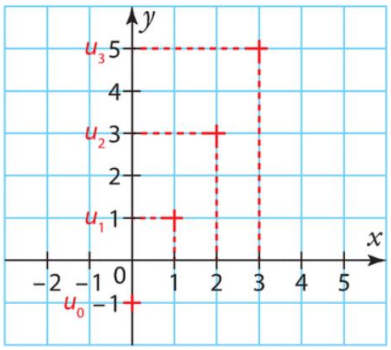
④ Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on construit les termes à l'aide de la courbe de représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$.

Exemples

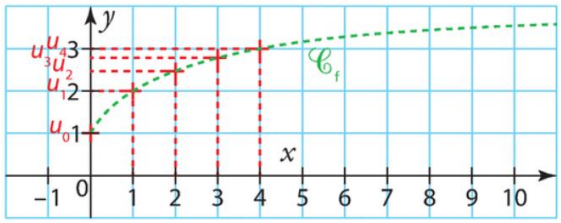
① On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



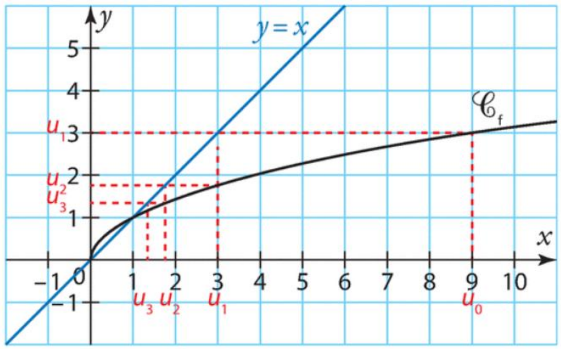
② On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



③ On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.



④ On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

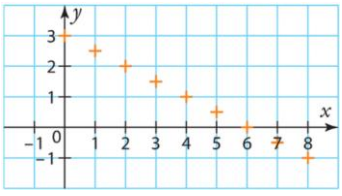


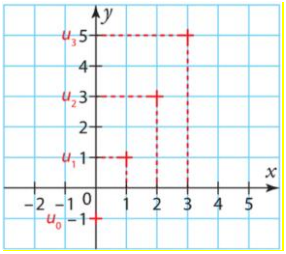
Règle Représentation graphique

Les points de sa représentation graphique se situent sur la droite d'équation $y = r \times x + u_0$.
On parle d'évolution linéaire.

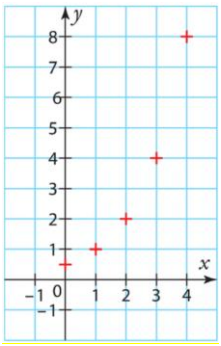
Règle Représentation graphique

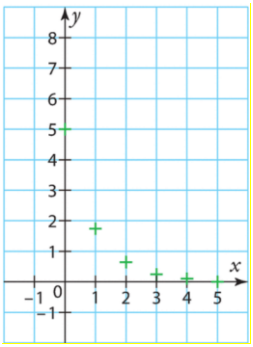
Pour les représentations graphiques des suites géométriques, on parle d'évolution exponentielle.





Suites arithmétiques (évolution linéaire)



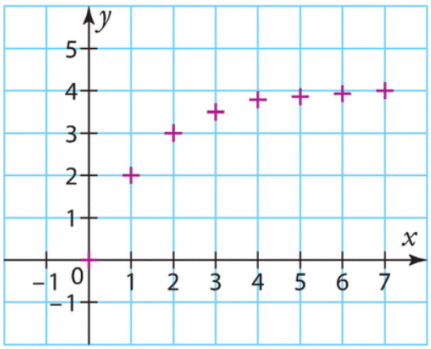


Suites géométriques (évolution cexponentielle)

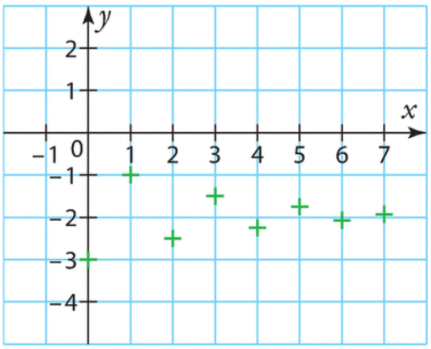
Définition Suite ayant pour limite un nombre réel

Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemples



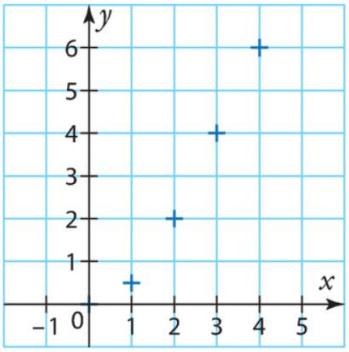
① On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4, donc on peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.



② On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de -2, donc on peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

Définition Suite ayant pour limite $+\infty$

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi grands que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) diverge et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

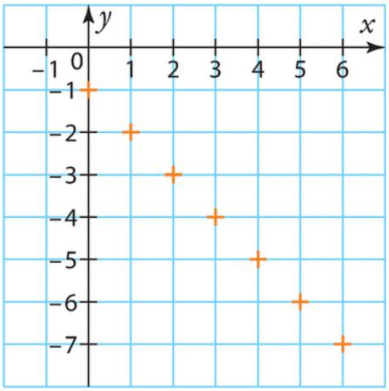


Exemple

On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus grands.
Donc on peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition Suite ayant pour limite $-\infty$

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi petits que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) diverge et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Remarque Petit ne signifie pas proche de 0, mais négatif et grand en valeur absolue.
Par exemple, $-1\,000\,000$ est petit.

Exemple

On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus petits. Donc on peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque Certaines suites n'ont pas de limite.
Dans ce cas, on dit que la suite diverge.
Diverger signifie « ne pas converger ».