On considère une expérience aléatoire dont l'univers $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \ldots ; e_r\}$ est fini et une loi de probabilité p sur Ω.

Définition Variable aléatoire réelle (discrète)

Une variable aléatoire réelle X sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Notation a étant un nombre réel, on note $\{X = a\}$ l'événement X prend la valeur a et $p(X = a)$ sa probabilité.

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$, on définit la loi de probabilité de X.

Remarques

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut se présenter sous la forme d'un tableau.
- La somme des probabilités de toutes valeurs prises par la variable aléatoire est égale à 1. On a : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Définition Espérance

L'espérance de X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

Remarques

- Lorsque X est une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties à ce jeu.
- Un jeu est équitable si l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain algébrique est nulle.

Définition Variance

La variance de X est le nombre réel noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

Définition Écart-type

L'écart-type de X est le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété Formule de König-Huygens

On a : $V(X) = p_1(x_1)^2 + p_2(x_2)^2 + \ldots + p_n(x_n)^2 - (E(X))^2$

Définitions Variable aléatoire $aX + b$

Pour tous nombres réels a et b, on peut définir une nouvelle variable aléatoire en associant à chaque issue donnant la valeur x_i, le nombre réel $ax_i + b$.
Cette nouvelle variable aléatoire se note $aX + b$.

Propriété $E(aX + b)$ et $V(aX + b)$

Soit a et b deux nombres réels. On a :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$