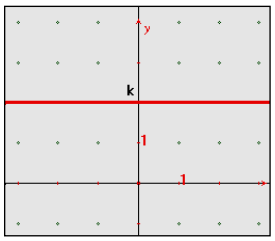
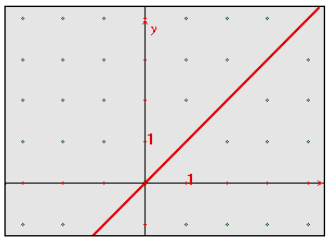
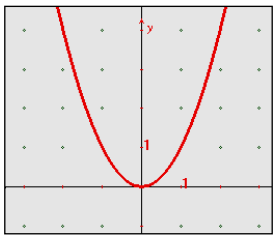
Nombre dérivé des fonctions usuelles



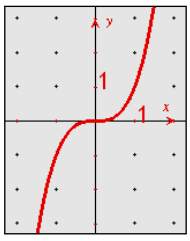
$f(x)=k$
$D=\mathbb{R}$



$f(x)=x$
$D=\mathbb{R}$



$f(x)=x^2$
$D=\mathbb{R}$



$f(x)=x^3$
$D=\mathbb{R}$

1. Rappeler la définition du nombre dérivé d'une fonction f au point d'abscisse a. Que représente graphiquement ce nombre ? Comment se note-t-il ?

2. Que peut-on dire du nombre dérivé d'une fonction constante ? Que peut-on dire du nombre dérivé de la fonction identité ? Quel est le nombre dérivé de la fonction carrée en a ? Quel est le nombre dérivé de la fonction cube en a ?

Opérations usuelles

3. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+x^3$. Il s'agit de la somme de la fonction carrée avec la fonction cube. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a. Quelle remarque peut-on faire ?

4. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-x$. Il s'agit de la différence entre la fonction carrée et la fonction identité. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a. Quelle remarque peut-on faire ?

5. On considère la fonction f définie par $f(x)=k\times x^2$ où k est une constante. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a. Quelle remarque peut-on faire ?

Tableau récapitulatif

6. Recopier et compléter le tableau suivant :

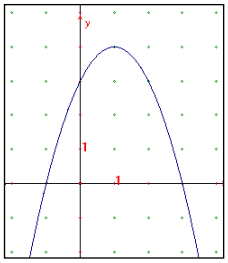
Dérivées des fonctions usuelles		*Opérations sur les dérivées*	
$\boxed{f(x)=k}$ Constante	?	$\boxed{f=u+v}$ Somme	?
$\boxed{f(x)=x}$ Identité	?	$\boxed{f=u-v}$ Différence	?
$\boxed{f(x)=x^n}$ Puissance n	?	$\boxed{f=k\times u}$ Produit par une constante	?

Situation 1

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Calculer la dérivée et fresser le tableau de signe de la dérivée.

x	
f'(x)	



Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

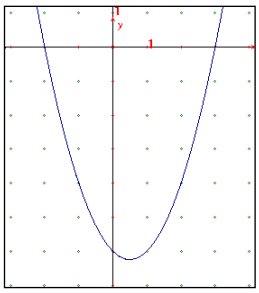
x	
f (x)	

Situation 2

$f(x) = x^2 - x - 6$

Calculer la dérivée et dresser le tableau de signe de la dérivée.

x	
f'(x)	



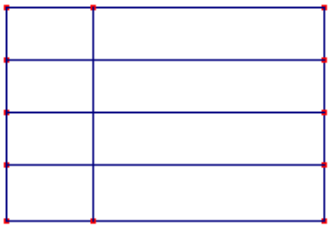
Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

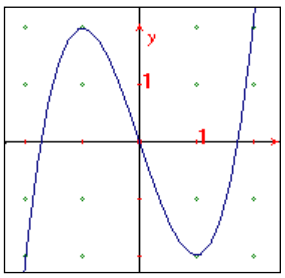
x	
f (x)	

Situation 3

$f(x) = x^3 - 3x$

Calculer la dérivée et dresser le tableau de signe de la dérivée de la fonction.





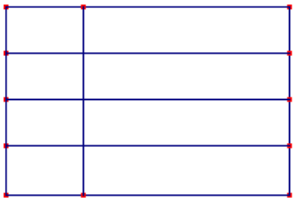
Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

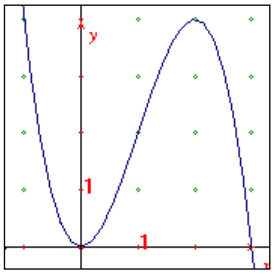
x	
f (x)	

Situation 4

$f(x) = 3x^2 - x^3$

Calculer la dérivée et dresser le tableau de signe de la dérivée de la fonction.





Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

x	
f (x)	

Conclusions

A partir des 4 situations étudiées à la page précédente, énoncer deux implications mathématiques entre le signe de la dérivée sur un intervalle et les variations de la fonction sur ce même intervalle. Enoncer ensuite une troisième implication entre l'annulation de la dérivée en un point et la nature de la tangente à la courbe en ce point.

A l'issue de ce travail préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un extrémum en un point. Préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour que cet extrémum soit un maximum. Préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour que cet extrémum soit un minimum.

Etude de deux fonctions polynômes sur un intervalle

La fonction f est définie sur l'intervalle $I=[-1;3]$ par la formule : $f(x)=x^3-3x^2$. Calculer la dérivée $f'(x)$. Montrer que $f'(x)=3x(x-2)$. Etudier, à l'aide d'un tableau, le signe de la dérivée. En déduire les variations de la fonction. Calculer les valeurs aux extrémités des flèches.

x			
$f'(x)$			
$f(x)$			

La fonction g est définie sur l'intervalle $I=[-2;2]$ par la formule : $g(x)=x-\frac{1}{3}x^3$. Calculer la dérivée $g'(x)$. Montrer que $g'(x)=(1-x)(1+x)$. Etudier, à l'aide d'un tableau, le signe de la dérivée. En déduire les variations de la fonction. Calculer les valeurs aux extrémités des flèches.

x			
$g'(x)$			
$g(x)$			

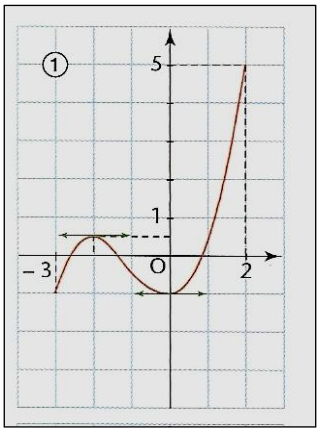
Recherche et caractérisation d'extrémums locaux

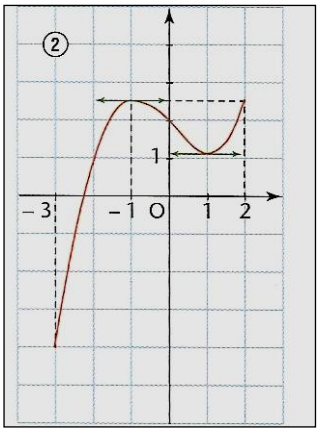
1. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-6x^2+1$. Etudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$. Déterminer et caractériser les extremums locaux de la fonction.

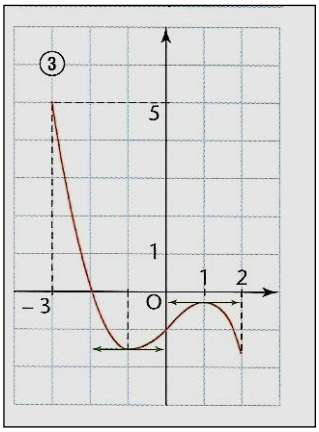
2. On considère la fonction g définie par $g(x)=3x^4-4x^3$. Etudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$. Déterminer et caractériser les extremums locaux de la fonction.

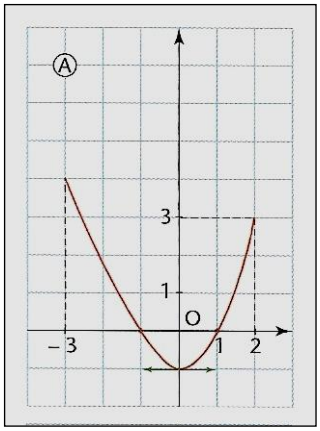
Associer une fonction à sa dérivée

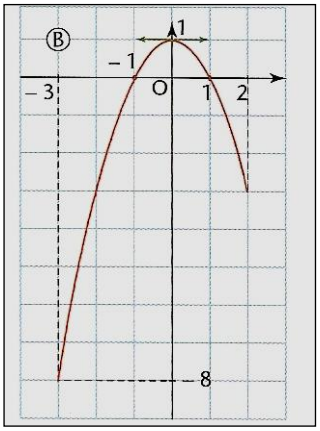
Les courbes 1, 2 et 3 sont les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h et les courbes A, B et C représentent leurs fonctions dérivées f', g' et h'. Dresser les tableaux de variations des trois fonctions f, g et h. Dresser les tableaux de signe des trois courbes A, B et C. Associer à chaque fonction sa dérivée.

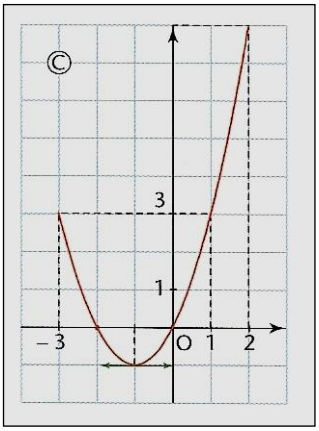




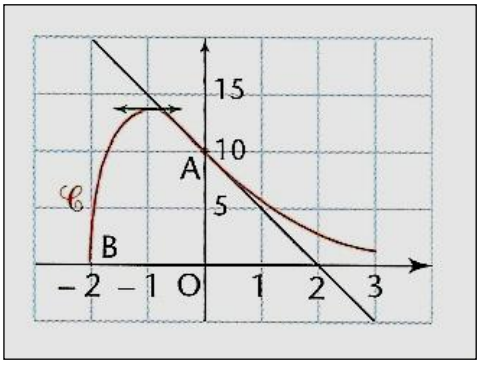


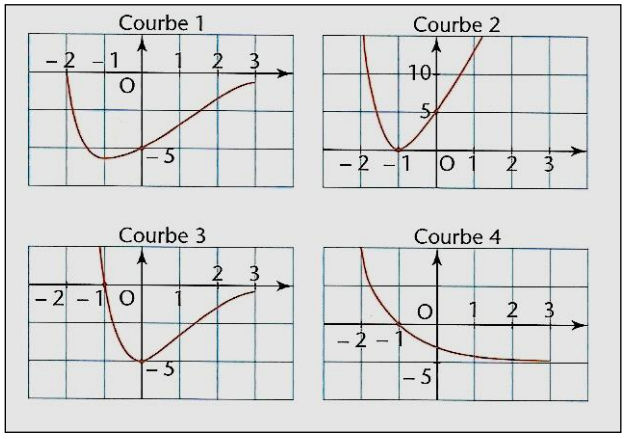






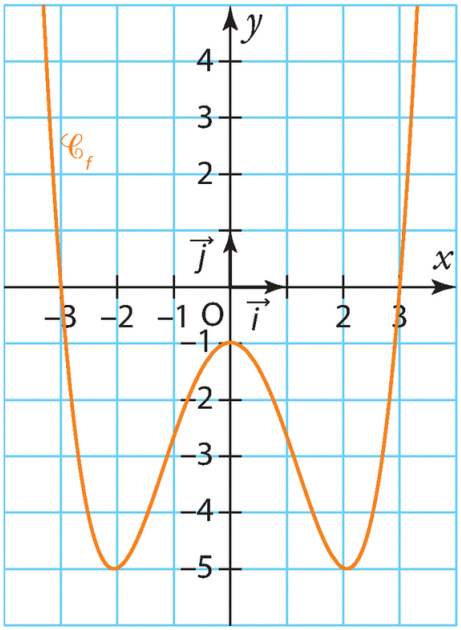
Retrouver la dérivée d'une fonction





La courbe (C) tracée ci-dessus à gauche est la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[2;3]$. Parmi les quatre courbes représentées ci-dessus à droite, quelle est celle qui représente la dérivée f' ? Justifier en comparant des tableaux de variations et de signes…

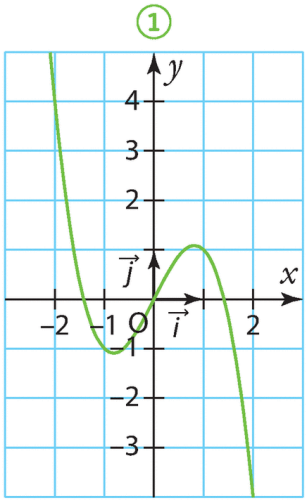
Quelques lectures graphiques supplémentaires

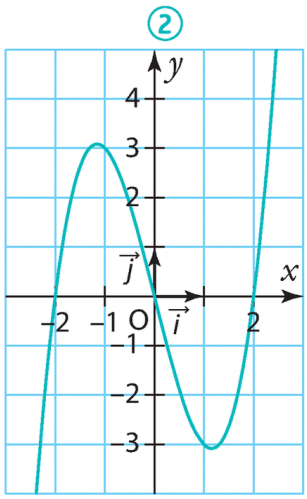


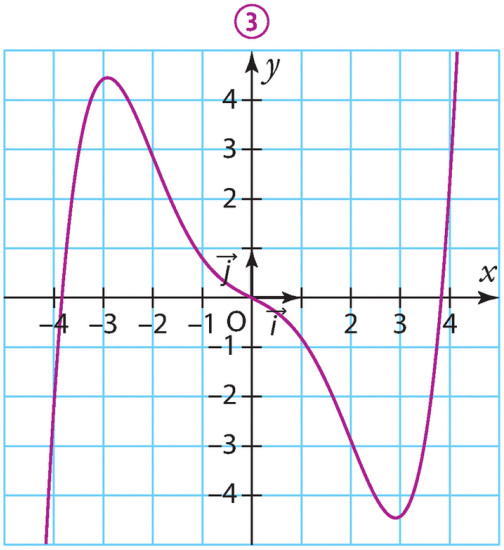
Partie A

On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f. On souhaite dans cet exercice retrouver le graphe de sa dérivée.

1. Dresser par lecture graphique le tableau de variation de la fonction f proposée ci-contre.
2. Dresser par lecture graphique les tableaux de signes des courbes 1, 2 et 3 proposées ci-dessous.
3. Associer à la fonction f la courbe représentative de sa dérivée. La réponse sera justifiée.

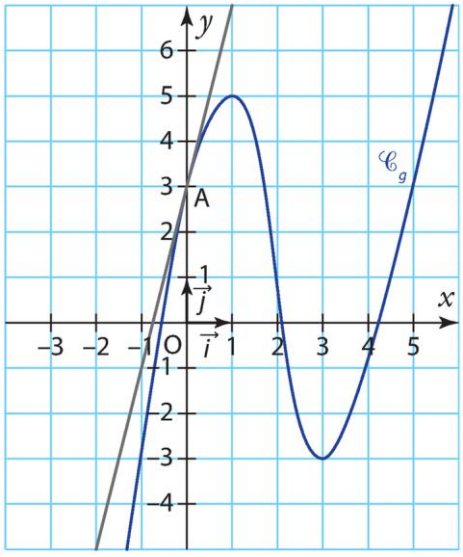




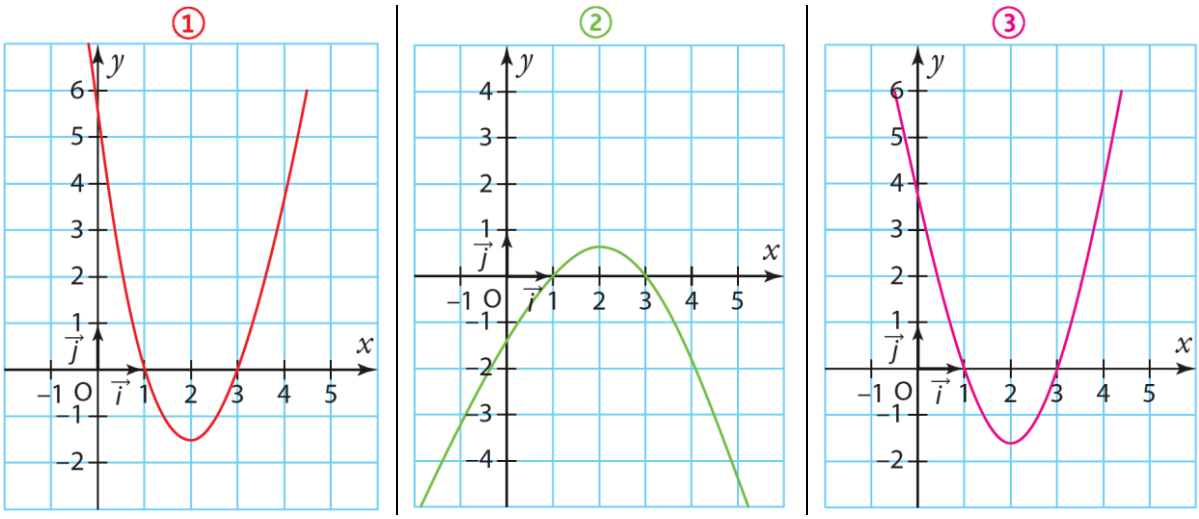


Partie B

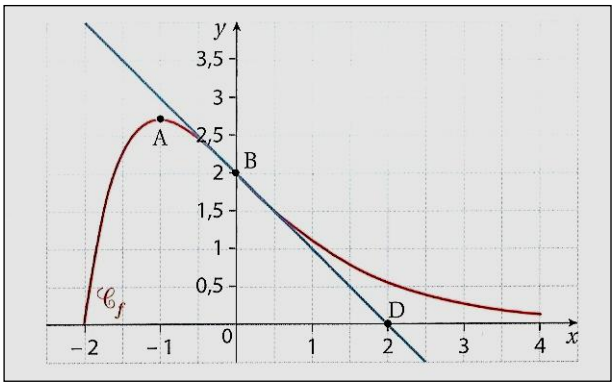
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction g. On souhaite dans cet exercice retrouver le graphe de sa dérivée.



1. Dresser par lecture graphique le tableau de variation de la fonction g proposée ci-contre.
2. Dresser par lecture graphique les tableaux de signes des courbes 1, 2 et 3 proposées ci-dessous.
3. Associer à la fonction g la courbe représentative de sa dérivée. La réponse sera justifiée.



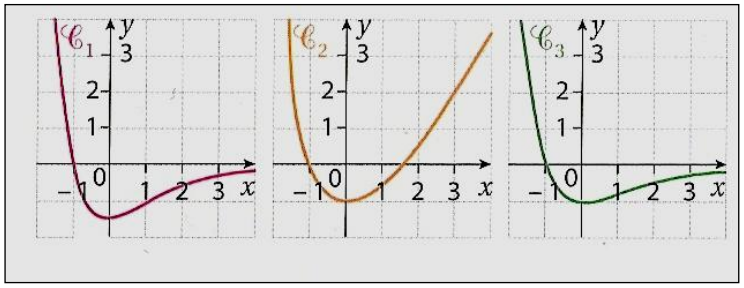
Partie C



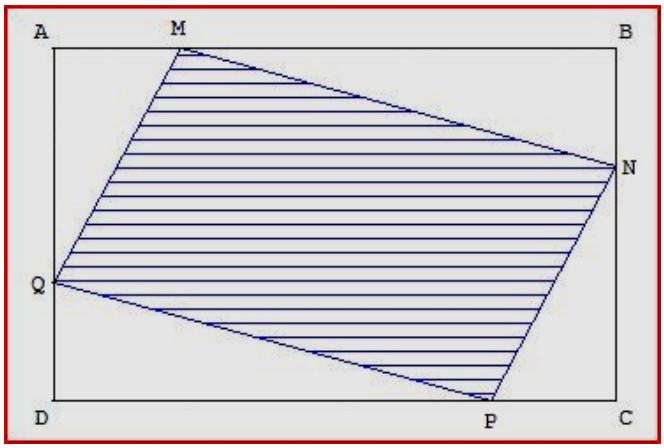
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;4]$. On note f' la dérivée de la fonction f. La courbe C_f représente la fonction dans un repère orthonormal. La tangente à la courbe au point A est horizontale. La tangente à la courbe au point B passe par le point D.

1. Déterminer graphiquement $f'(0)$. Déterminer graphiquement $f'(-1)$.

2. Parmi les trois courbes proposées ci-contre, laquelle représente la courbe de la dérivée ? Justifier succinctement mais de manière précise la réponse donnée.



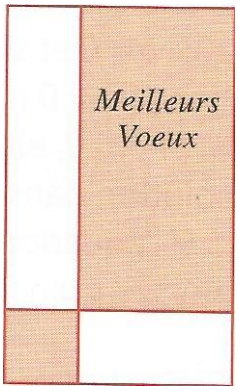
En route vers les exercices d'optimisation



ABCD est un rectangle de dimensions 9 et 6. À l'intérieur de ce rectangle on trace le quadrilatère MNPQ de telle sorte que AM=BN=CP=DQ. On admet que ce quadrilatère est un parallélogramme et on s'intéresse à son aire. Le but de l'exercice est de déterminer où placer le point M sur le segment [AB] pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible. On note $AM = x$.

Optimisation d'une aire, optimisation d'un volume

Partie A



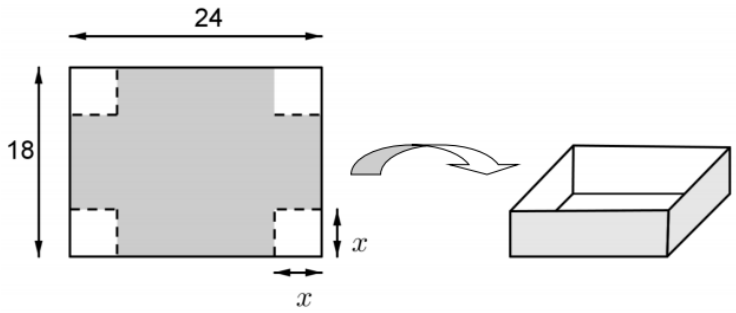
Une carte de vœu est de forme rectangulaire, de dimensions 6 centimètres (largeur) et 10 centimètres (longueur). Elle comporte un rectangle et un carré coloré comme l'indique la figure. On note x la dimension d'un côté du carré situé en bas à gauche et $f(x)$ l'aire totale de la partie colorée.

1. Montrer* que $f(x)=2x^2-16x+60$.

2. Calculer la dérivée $f'(x)$, étudier son signe sur l'intervalle $[0;6]$ et en déduire les variations de f sur ce même intervalle.

3. Pour quelle valeur de x l'aire colorée est-elle minimale ? Quelle est cette aire minimale ?

Partie B



Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Il enlève des carrés de côté x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève verticalement les bords. On note $g(x)$ le volume du pavé droit ainsi formé.

1. Montrer* que $g(x)=4x^3-84x^2+432x$.

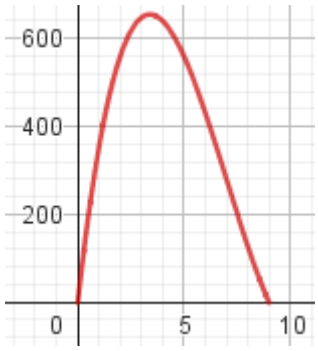
2. Calculer la dérivée $g'(x)$, étudier son signe sur l'intervalle $[0;9]$ et en déduire les variations de g sur ce même intervalle. Dans cette partie, lorsque cela sera nécessaire, on arrondira les valeurs au dixième près.

3. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Quelle est ce volume maximal ?

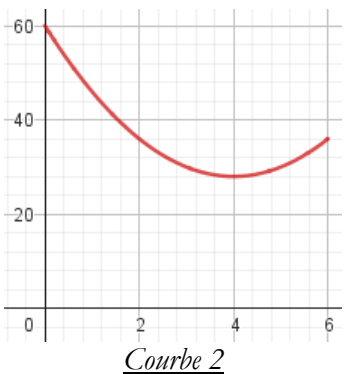
Partie C

Associer à chacune de deux courbes ci-contre l'une des deux fonctions étudiées dans les parties A et B. Il n'est pas demandé de justifier la réponse.

(*) en cas de difficultés, vous utiliserez ce résultat sans le démontrer dans le reste de l'exercice.



Courbe 1



Courbe 2

Recette et coûts de production, optimisation d'un bénéfice

Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. La fabrication peut varier entre 0 et 18 lots. On appelle x le nombre de lots fabriqués et vendus par l'entreprise.

- **Le coût de fabrication** en euros d'un nombre x de lots, est donné par la fonction f définie par $\boxed{f(x)=4x^3-96x^2+576x+100}$, dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative C.
- Chaque lot fabriqué est vendu 125 euros. **La recette** est donc donnée par la fonction g définie par $\boxed{g(x)=125x}$.

Etude des coûts de fabrication

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $[0;18]$ et en déduire les variations de f.

Etude de la recette

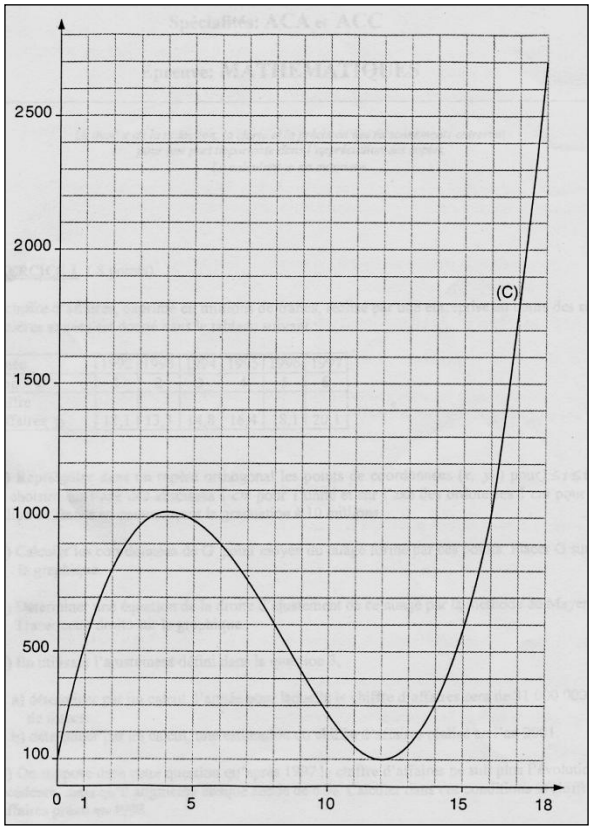
3. Tracer la droite D d'équation $y=125x$ dans le même repère que la courbe C.
4. Sachant que l'entreprise ne vend que des nombres entiers de lots de jouets, déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel l'entreprise réalise un bénéfice. Justifier la réponse.

Etude du bénéfice

On considère la fonction h définie par :

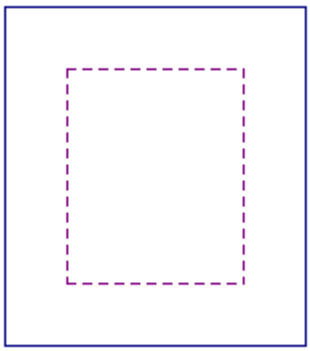
$$\boxed{h(x)=g(x)-f(x)}.$$

5. Déterminer $h(x)$.
6. Calculer $h'(x)$.
7. Etudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;18]$.
8. Caractériser les extremums locaux de la fonction h.
9. Que représente la fonction h étudiée dans cette partie ?
10. Que nous apprend l'étude de cette fonction ?



Problème faisant intervenir une fonction rationnelle

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page, le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm², les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.



Le but du problème est de déterminer quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit la plus faible possible.

1. On note x la dimension horizontale et y la dimension verticale du rectangle représentant la page du livre. Exprimer y en fonction de x.

2. On appelle f la fonction exprimant l'aire de la page du livre en fonction de x. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$. Préciser l'intervalle d'étude de la fonction f.

3. Procéder à l'étude de la fonction sur cet intervalle. Utiliser pour cela l'implication proposée ci-contre. Ce résultat sera démontré plus avant.

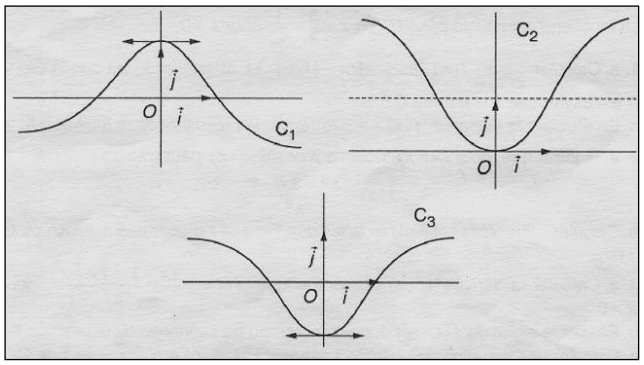
4. Conclure en apportant une réponse à la question posée par le problème.

Si une fonction rationnelle f est définie par $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}.$$

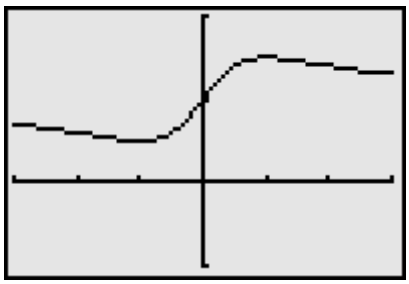
Etude de deux fonctions rationnelles

Soit f le fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$ par : $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

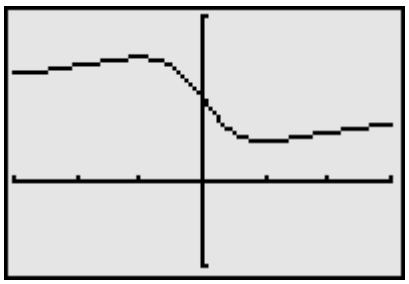


Calculer la dérivée de la fonction. Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau des variations de la fonction. Quelle est, parmi les trois courbes représentées ci-contre, la courbe représentative de g ?

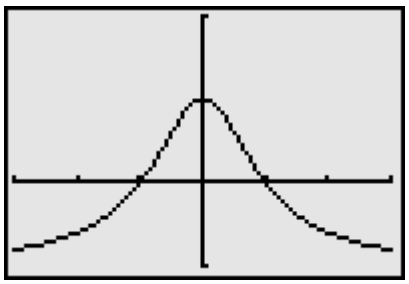
Même exercice que le précédent avec la fonction h définie sur $[-3;3]$ par $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.



Courbe 1



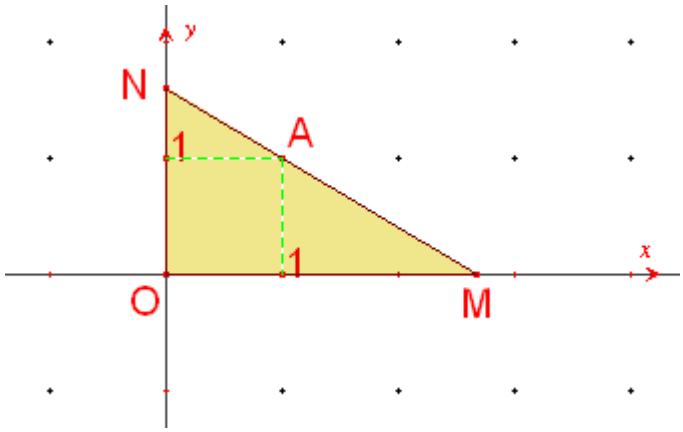
Courbe 2



Courbe 3

Minimiser une aire

On considère le point A de coordonnées $(1;1)$. M et N sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec les des deux axes du repère. Le but du problème est de déterminer la position de M et de N pour que l'aire du triangle OMN soit minimale. On note x l'abscisse de M et y l'ordonnée de N.



1. Exprimer y en fonction de x.

2. On appelle f la fonction exprimant l'aire du triangle OMN en fonction de x. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$. Préciser l'intervalle d'étude de la fonction f.

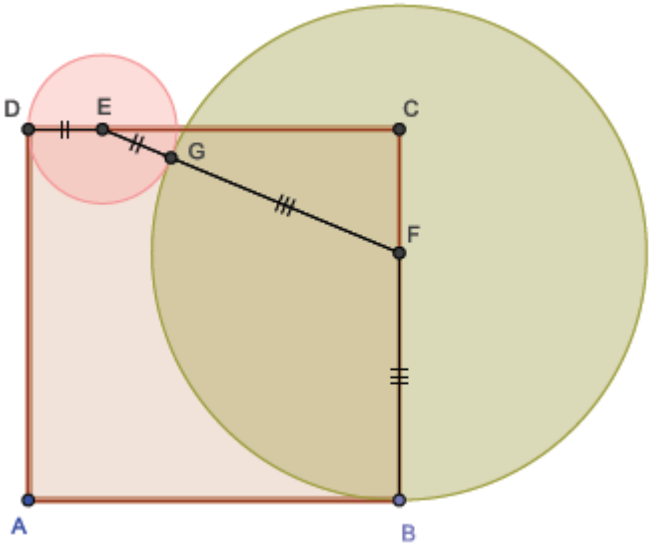
3. Procéder à l'étude de la fonction sur cet intervalle puis conclure.

Minimiser une longueur

ABCD est un carré de côté 1. E est un point du segment [CD] et F est un point du segment [BC]. Les cercles C et C' de centres respectifs E et F passent respectivement par les points D et B. Ces deux cercles sont tangents entre eux au point G.

Le but de ce problème est de déterminer la position du point G pour laquelle la distance EF est minimale.

On pose $DE = x$ et $BF = y$.

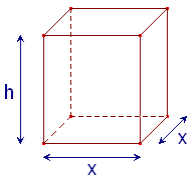


1. Démontrer que $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. En déduire l'expression de la distance EF en fonction de x.

2. Etudier la fonction d définie par $d(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0;1]$. En déduire la position de G pour que la distance EF soit minimale. Préciser cette distance minimale.

Minimiser une surface

On souhaite fabriquer une cuve à ciel ouvert. Cette cuve a la forme d'un pavé droit à base carrée. Son volume doit être de 4 mètres cube. On utilise de la peinture antirouille pour traiter les parois intérieures. Déterminer les dimensions de la cuve qui permettent d'utiliser le moins de peinture possible.



Attention démonstration !

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un quotient de deux fonctions On parle de fonction rationnelle. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 2, étape 3, étape 5 et étape 6 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ On considère une fonction s'écrivant comme le quotient de deux fonctions.	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$
Etape 1 On connait la formule du taux de variation d'une fonction.	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Etape 2 On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.	$\dfrac{\frac{?}{?}-\frac{?}{?}}{h}$
Etape 3 On réduit les deux fractions au même dénominateur afin de pouvoir soustraire.	$\dfrac{\frac{?\times ?}{?\times ?}-\frac{?\times ?}{?\times ?}}{h}$
Etape 4 On réduit les étages de cette fraction de fraction.	$\dfrac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a+h)}{v(a+h)\times v(a)\times h}$
Etape 5 On introduit deux quantités qui, par développement, s'annulent.	$\dfrac{[?-?]\times ?-?\times[?-?]}{v(a+h)\times v(a)\times h}$
Etape 6 On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $h\to 0$.	$\underbrace{\dfrac{1}{v(a+h)\times v(a)}}_{[v(a)]^2}\times\left[\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?-?\times\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{v'(a)}\right]$
Arrivée On retrouve l'expression de la dérivée du quotient de deux fonctions.	$\dfrac{u'(a)\times v(a)-u(a)\times v'(a)}{[v(a)]^2}$

$\dfrac{\frac{?}{?}-\frac{?}{?}}{h}$	$\dfrac{\frac{?\times ?}{?\times ?}-\frac{?\times ?}{?\times ?}}{h}$	$\dfrac{[?-?]\times ?-?\times[?-?]}{v(a+h)\times v(a)\times h}$	$\underbrace{\dfrac{1}{v(a+h)\times v(a)}}_{[v(a)]^2}\times\left[\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?-?\times\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{v'(a)}\right]$
Etape 2	*Etape 3*	*Etape 5*	*Etape 6*

Coût total – Recette – Bénéfice – Cout moyen

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10. Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique proposé ci-après donne la représentation graphique de la fonction C.

Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

1. Tracer sur le graphique la droite (D) d'équation $y = 680x$.

2. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice lorsque le prix p du marché est de 680 euros.

3. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$. Démontrer que $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

4. Calculer $B'(x)$ et étudier les variations de la fonction B sur $[0;10]$.

5. En déduire pour quelle quantité de tissu le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximal. Préciser la valeur de ce bénéfice et matérialiser le par un segment la figure.

Etude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite.

On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

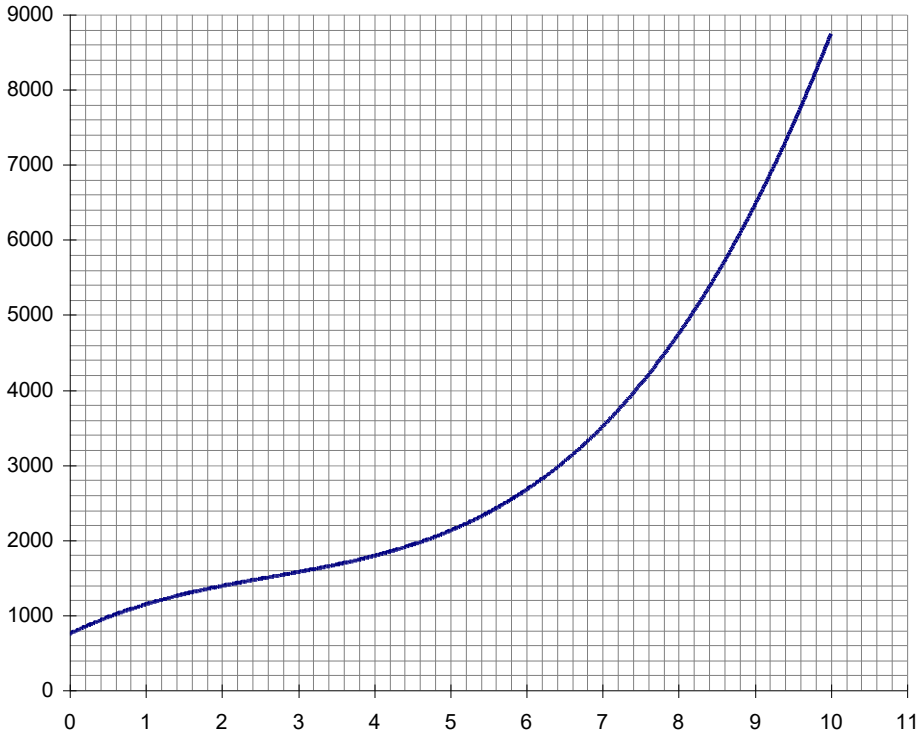
1. Calculer $C_M'(x)$.

2. Montrer que $C_M'(x) = \dfrac{(30x-150)(x^2+x+5)}{x^2}$.

3. En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;10]$.

4. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?

5. Que vaut dans ce cas le coût moyen de production ?



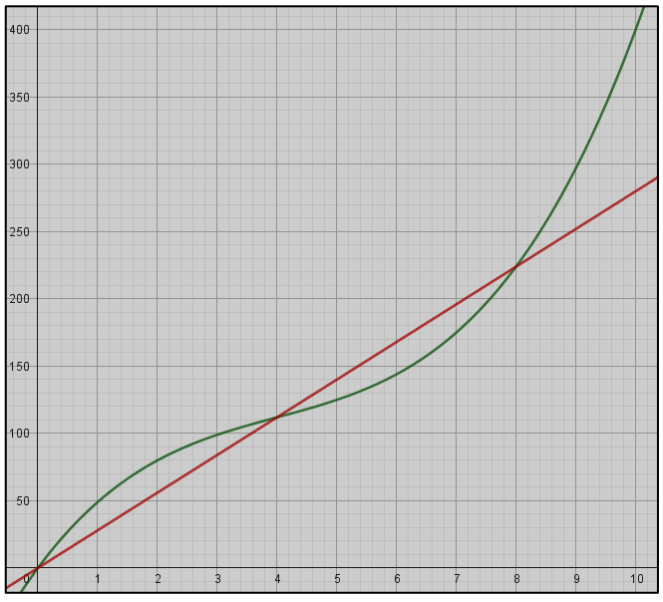
Courbe représentative des coûts de production

Coût total – Recette – Bénéfice

Un fabricant de pièces de fonderies réalise une production mensuelle de x centaines de pièces (avec $0 \leq x \leq 10$, c'est-à-dire qu'elle en produit entre 0 et 1000 par mois). Le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$.

Le prix du marché des pièces de fonderies soit égal à 28000 euros pour 100 pièces vendues. La recette est donc donnée par : $R(x) = 28x$. Le bénéfice est donné par $B(x) = R(x) - C(x)$.

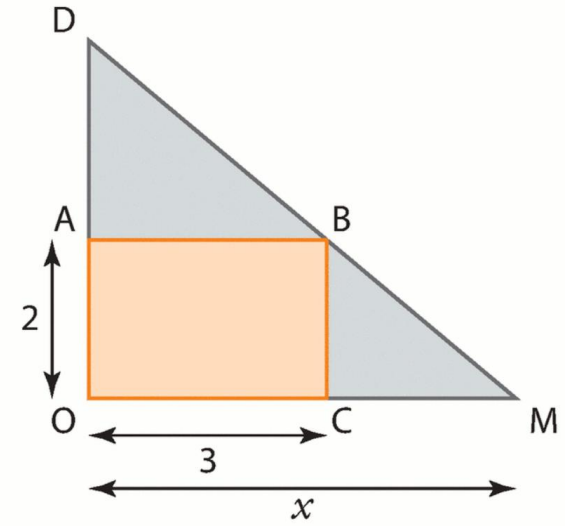
1. On a tracé sur le graphique la droite d'équation $y = 28x$. Déterminer graphiquement pour quelles quantités de pièces produites et vendues l'entreprise réalise un bénéfice.



2. Montrer que $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 32x$ et étudier les variations de B sur $[0;10]$. En déduire, à l'unité près, la quantité de pièces produites et vendues pour laquelle le bénéfice est maximal. Matérialisez graphiquement ce bénéfice maximal dans le repère.

Minimiser une surface

Un charpentier doit construire le toit incliné (DM) au dernier étage d'une maison en laissant un espace rectangulaire vide (OABC) qui correspondra à la surface habitable de cet étage. Il observe qu'il peut faire varier l'inclinaison de ce toit tout en conservant l'espace habitable (OABC).



La hauteur OD du triangle OMD va varier en fonction de la longueur au sol x. Afin d'optimiser les choses, il souhaite déterminer la longueur x qui permettra de minimiser la surface du triangle OMD afin de minimiser la surface à chauffer sous la toiture.

1. A l'aide du théorème de Thalès, montrer que $\frac{OD}{2}=\frac{x}{x-3}$.

   En déduire que la surface du triangle OMD, exprimée en fonction de x est égale à $\frac{x^2}{x-3}$

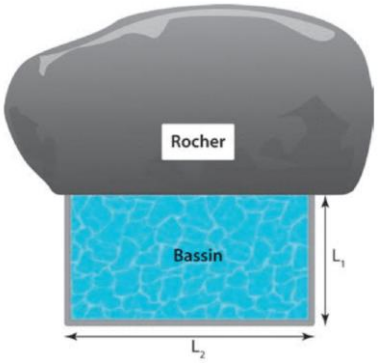
2. On va étudier la fonction h définie par $h(x)=\frac{x^2}{x-3}$ sur l'intervalle $]3;+\infty[$. Pour cela calculer $h'(x)$, montrer que $h'(x)=\frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$, étudier le signe de $h'(x)$ sur $]3;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction h sur ce même intervalle.

3. Pour quelle valeur de x la surface est-elle minimale ? Quelle est cette surface minimale ?

Minimiser une longueur

La superficie du bassin rectangulaire proposé ci-dessous doit être égale à 80 m^2. La bordure du bassin étant constituée de blocs de marbre, on souhaite déterminer les dimensions L_1 et L_2 du rectangle afin que la longueur de la bordure soit minimale (tout en conservant une aire de 80 m^2).

Soit x la longueur du coté L_1 du rectangle. On notera $b(x)$ la longueur totale de la bordure (c'est-à-dire $L_1+L_2+L_1$).



Pas de bordure le long du rocher !

1. Montrer que $b(x)=\frac{2x^2+80}{x}$.

2. Calculer $b'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de la fonction b sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Répondre à la question posée.