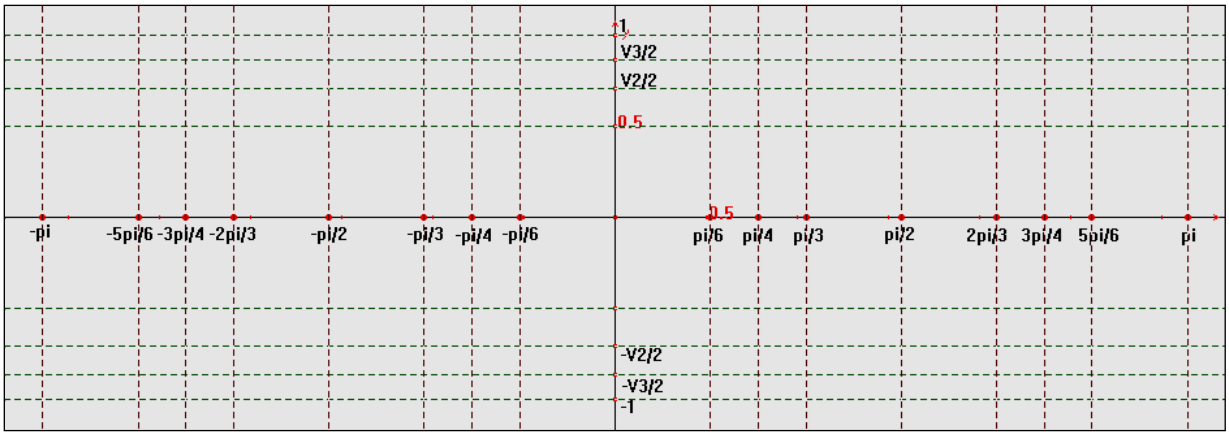
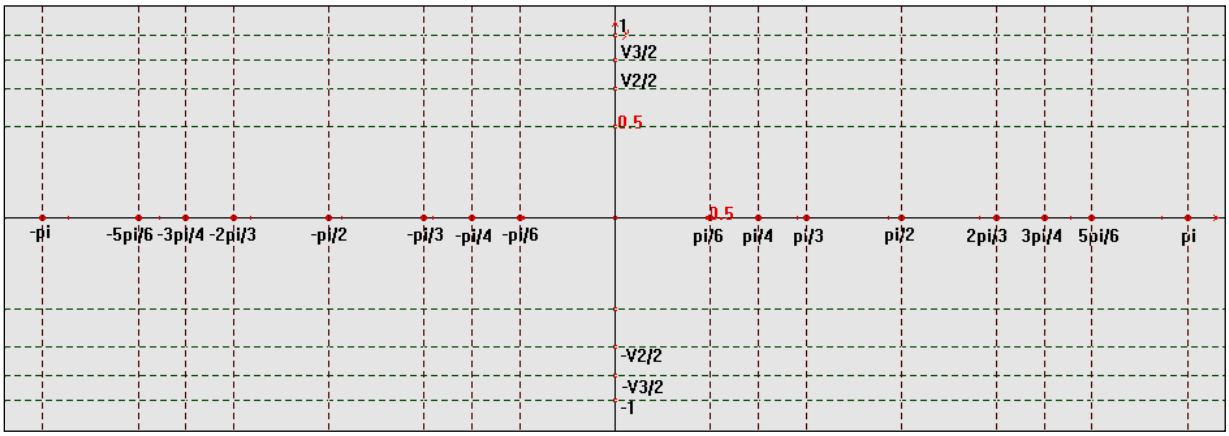
La fonction cosinus



1. Tracer la courbe représentative du cosinus.

2. Etablir le tableau de variations et le tableau de signes du cosinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

La fonction sinus



3. Tracer la courbe représentative du cosinus.

4. Etablir le tableau de variations et le tableau de signes du sinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Lien entre les deux fonctions trigonométriques

5. Mettre en relation le tableau de signe de la fonction cosinus avec le tableau de variation de la fonction sinus. Mettre en relation le tableau de signe de la fonction sinus avec le tableau de variation de la fonction cosinus. Qu'en déduisez-vous ?

Rappel de formules

6. Proposer un tableau récapitulatif des formules de dérivée des fonctions usuelles que vous connaissez (constante, identité, carré, cube, puissance n, inverse, racine carrée, cosinus, sinus. Proposer un tableau récapitulatif des formules de dérivée des opérations usuelles que vous connaissez (somme, différence, produit par une constante et quotient).

La formule de dérivée d'un produit

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 2, de l'étape 3 et de l'étape 4 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ
On considère une fonction s'écrivant comme le produit de deux fonctions.

$$f(x)=u(x)\times v(x)$$

Etape 1
On connait la formule du taux de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.

$$\frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$$

Etape 3
On introduit deux quantités qui, par développement, s'annulent.

$$\frac{\left[u(a+h)-u(a)\right]\times v(a+h)+u(a)\times\left[v(a+h)-v(a)\right]}{h}$$

Etape 4
On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $h\to 0$.

$$\underbrace{\frac{u(a+h)-u(a)}{h}}_{u'(a)}\times v(a+h)+u(a)\times\underbrace{\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}_{v'(a)}$$

Arrivée
On retrouve l'expression de la dérivée du quotient de deux fonctions.

$$u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$$

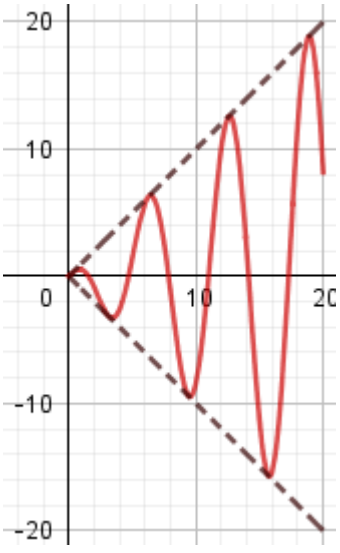
Application directe

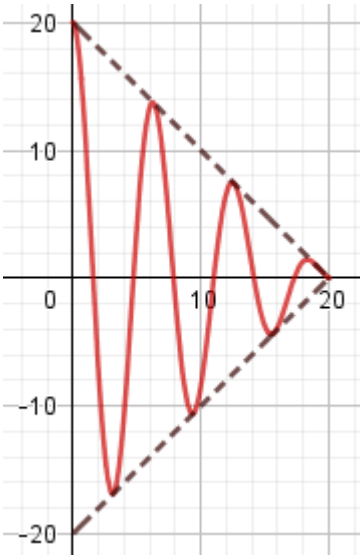
On considère ci-contre les représentations graphiques de deux fonctions proposées sur l'intervalle [0 ; 20].

$f(x)=x\times\cos(x)$

$g(x)=(20-x)\times\cos(x)$

Sauriez-vous déterminer les dérivées respectives de ces deux fonctions ? Expliquer.





La formule de dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine. Toutes les étapes sont indiquées et valident le résultat important suivant : Si $f(x)=u(mx+p)$ alors $f'(x)=m\times u'(mx+p)$.

Départ On considère une fonction composée avec une fonction affine.	$f(x)=u(mx+p)$
Etape 1 On connait la formule du taux de variation d'une fonction.	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Etape 2 On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.	$\dfrac{u(m(a+h)+p)-u(ma+p)}{h}$
Etape 3 On introduit au numérateur et au dénominateur deux quantités identiques qui s'annulent.	$\dfrac{u(ma+p+mh)-u(ma+p)}{mh}\times\dfrac{mh}{h}$
Etape 4 On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $mh\to 0$.	$\underbrace{\dfrac{u(ma+p+mh)-u(ma+p)}{mh}}_{u'(ma+p)}\times\dfrac{mh}{h}$
Arrivée On retrouve l'expression de la dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine.	$m\times u'(ma+p)$

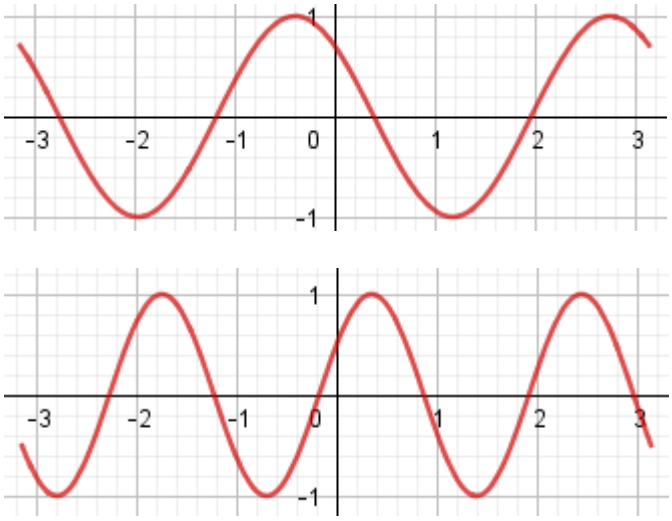
Application directe

On considère ci-contre les représentations graphiques de deux fonctions trigonométriques sur $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Sauriez-vous déterminer les dérivées respectives de ces deux fonctions ?



Des calculs de fonctions dérivées

1. Recopier et compléter le tableau récapitulatif suivant :

Dérivées des fonctions usuelles		*Opérations sur les dérivées*	
$f(x)=k$ Constante	?	$f=u+v$ Somme	?
$f(x)=x$ Identité	?	$f=u-v$ Différence	?
$f(x)=x^n$ Puissance n	?	$f=k\times u$ Produit par une constante	?
$f(x)=\sqrt{x}$ Racine	?	$f=u\times v$ Produit de deux fonctions	?
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ Inverse	?	$f=\dfrac{u}{v}$ Quotient de deux fonctions	?
$f(x)=\cos(x)$ Cosinus	?		?
$f(x)=\sin(x)$ Sinus	?	$f(x)=u(mx+p)$ Composée d'une fonction avec une fonction affine.	?

2. Appliquer les formules de dérivée des fonctions usuelles et des opérations usuelles afin de calculer la dérivée des fonctions proposées ci-dessous.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+6 \qquad g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$h(x)=\left(x^2+1\right)\times\sqrt{2x+3} \qquad k(x)=x\times\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$l(x)=x\times\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right) \qquad m(x)=\frac{1}{3x+4}$$

$$p(x)=\cos(x)\times\sin(x) \qquad t(x)=\tan(x)$$

3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f:x\to\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad g:x\to\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad h:x\to x\times\cos(2x+\pi)$$

$$k:x\to x^2\times\sin(3x+\pi)$$

Maximiser une aire

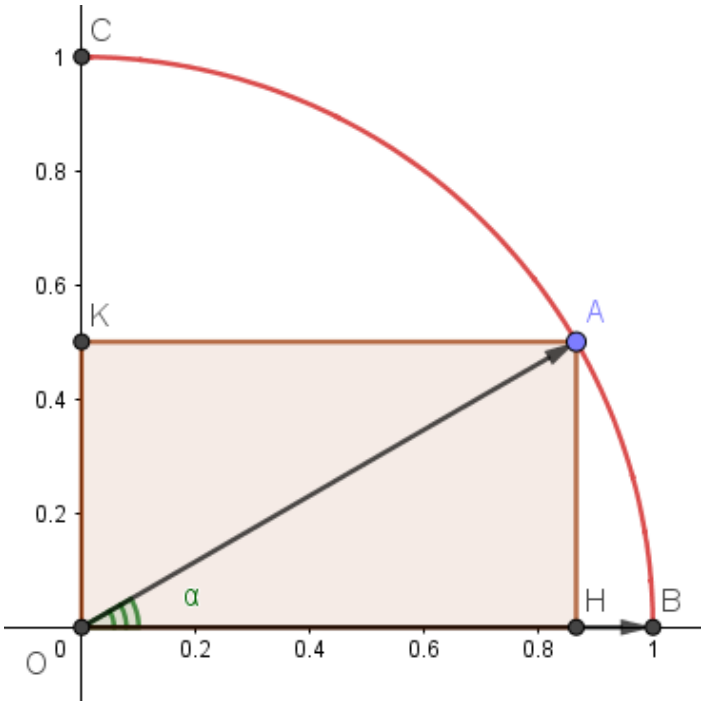
On considère le point A situé sur le quart supérieur droit du cercle trigonométrique (cercle de centre O origine du repère et de rayon 1).

On note H le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et K le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

On note α l'angle entre l'axe des abscisses et le demi-droite (OA).

On note x l'abscisse du point A.

On s'intéresse à l'aire du rectangle OHAK et on souhaite trouver la position de A sur le quart de cercle pour laquelle cette aire sera maximale.



Une première façon de procéder

On note $S(\alpha)$ l'aire du rectangle OHAK exprimée en fonction de l'angle α du point A.

1. Montrer que $S(\alpha)=\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)$.

2. En déduire $S'(\alpha)=-1+2\cos^2(\alpha)$.

   Etudier les variations de S sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Pour quelle valeur de α l'aire est-elle maximale ? Quelle est cette aire ?

Une autre façon de procéder (hors programme en première)

On note $S(x)$ l'aire du rectangle OHAK exprimée en fonction de l'abscisse x du point A.

1. Montrer que $S(x)=x\times\sqrt{1-x^2}$.

2. En déduire $S'(x)=\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Etudier les variations de S sur l'intervalle $[0;1]$.

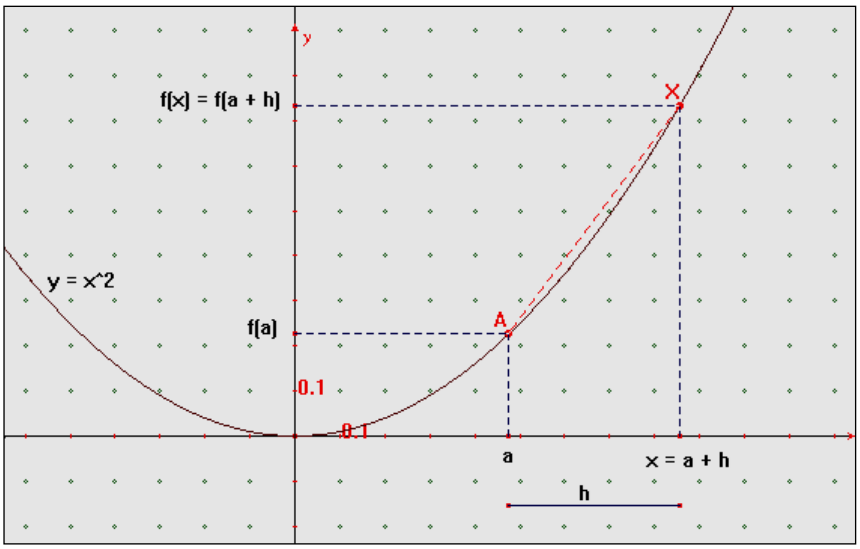
3. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Quelle est cette aire ?

Rappels

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Une fonction est **dérivable** en a si le taux d'accroissement de cette fonction admet une **unique** limite **finie** quand $h \to 0$.



La relation d'Euler

Si h est **« petit »** alors : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$ $\langle Euler \rangle$. Cette égalité est la relation d'Euler.

Recherche d'une nouvelle fonction

Le but de cette activité est de représenter graphiquement la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel.

La relation d'Euler pour un h petit et positif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}1$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}2$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}3$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[0;2]$

La relation d'Euler pour un h petit et négatif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}1$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}2$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}3$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[-2;0]$.

Utilisation d'un tableur et d'un grapheur

Tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler.

Propriété et définition

Il existe une fonction f et une seule définie et dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ vérifiant les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée $f(x)=\exp(x)$.

Propriété algébrique fondamentale

Pour tous réels x et y on a la relation $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

Cette propriété indique que l'exponentielle transforme une somme en produit d'exponentielles.

Propriétés algébriques induites

Pour tous réels x et y on a la relation $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ et la relation $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

La première propriété dit que l'exponentielle transforme un opposé en inverse d'exponentielle et la deuxième dit que l'exponentielle transforme une différence en quotient d'exponentielles.

Signe et tableau de variation

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante.

Notation

L'image de x par la fonction exponentielle sera notée $\exp(x)=e^x$.

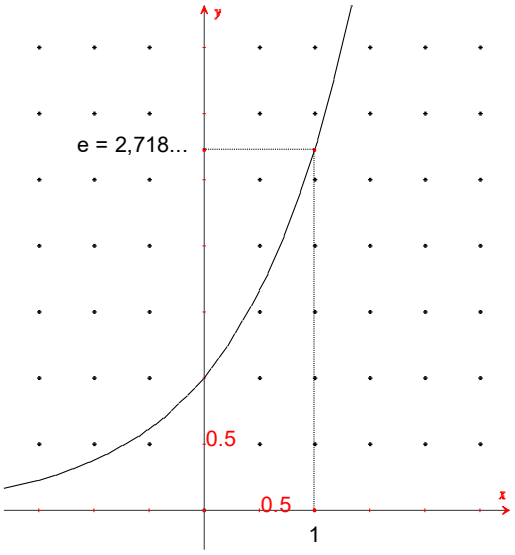
Représentation graphique et tangentes à la courbe

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.

Le nombre e est un réel tel que $e\approx 2,718...$

Ce nombre, comme le nombre $\pi\approx 3,141...$ ou le nombre $\sqrt{2}\approx 1,414...$ n'est pas un nombre rationnel.

Sa partie décimale est infinie. Sa valeur approchée est obtenue grâce à la méthode d'Euler.

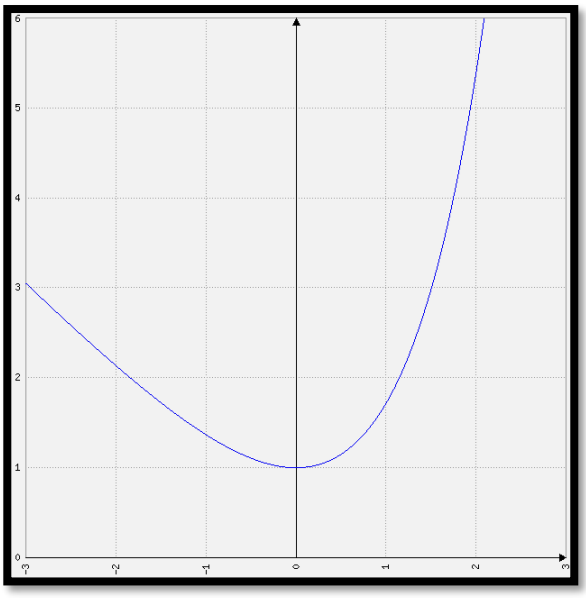


1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de l'exponentielle en $x=0$. Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative en $x=1$. Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.

Exercices d'application directe

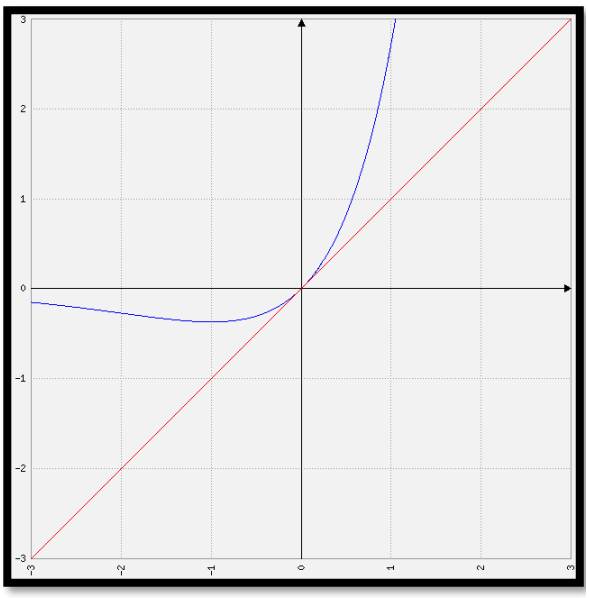
Exercice 1



On considère la fonction f définie par $f(x)=e^x-x$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction.
4. Pouvez-vous en déduire la position relative de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à $y=x$?

Exercice 2



On considère la fonction g définie par $g(x)=x\times e^x$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

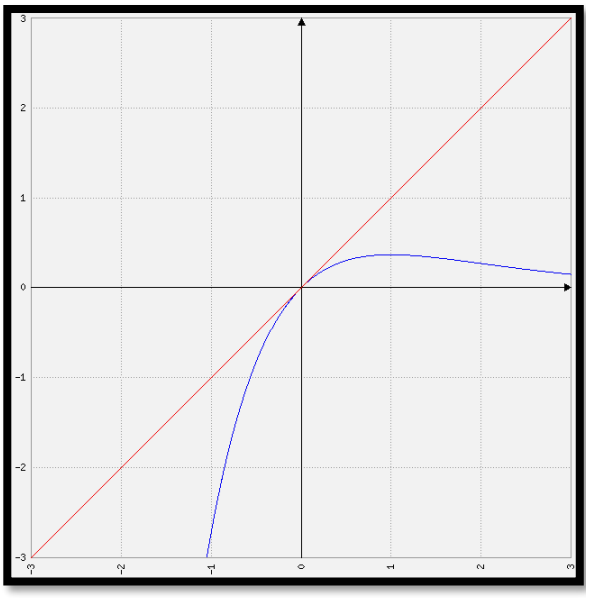
1. Calculer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $g'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction.
4. Pouvez-vous déterminer la position relative de la courbe de la fonction g par rapport à la droite $y=x$?

Exercice 3

1. On considère la fonction h définie par $h(x)=(2x+1)e^x$.
   Calculer $h'(x)$ et en déduire les variations de la fonction h.
2. On considère la fonction k définie par $k(x)=(2x-1)e^x$.
   Calculer $k'(x)$ et en déduire les variations de la fonction k.
3. On considère la fonction m définie par $m(x)=(x^2-1)e^x$.
   Calculer $m'(x)$ et en déduire les variations de la fonction m.

Exercice 4

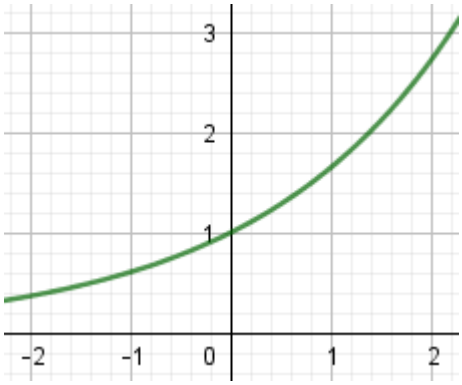
On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.



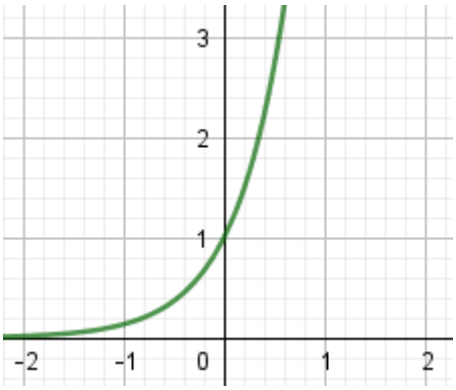
1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction.
4. Pouvez-vous déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y=x$?

Les fonctions exponentielles

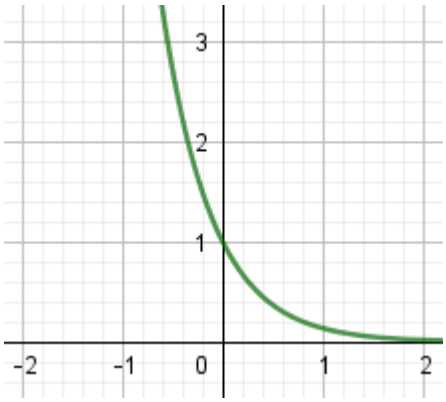
On considère les fonctions $f_{-2}(x)=e^{-2x}$, $f_{-0,5}(x)=e^{-0,5x}$, $f_{0,5}(x)=e^{0,5x}$ et $f_2(x)=e^{2x}$.



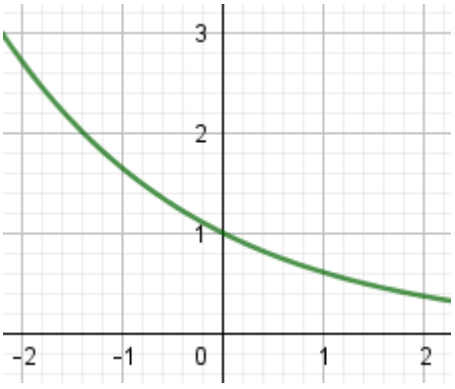
Courbe A



Courbe B



Courbe C



Courbe D

1. Associer à chacune des quatre fonctions sa représentation graphique.
2. Expliquer votre choix en calculant la dérivée et en étudiant son signe.

Exponentielle composée

La fonction f définie par $\boxed{f(x)=e^{mx+p}}$ est appelée **exponentielle composée** avec l'expression affine $mx+p$.

Calcul de la dérivée

La fonction f définie par $f(x)=e^{mx+p}$ est dérivable et sa dérivée est : $\boxed{f'(x)=m\times e^{mx+p}}$.

Cas particulier

La dérivée de la fonction g définie par $g(x)=e^{-x}$ est $g'(x)=-e^{-x}$,

Etude d'une production

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière en milliers de tonnes est donné par $f(x)=\left(2x^2+3x\right)e^{-x}$ pour $0\le x\le 6$.

1. Montrer que $f'(x)=\left(-2x^2+x+3\right)e^{-x}$. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;6]$.

2. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en milliers de tonnes ?

3. Au bout de combien de jours la production journalière sera-t-elle revenue à 1000 tonnes ?

Injection d'un médicament

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un médicament. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L) peut être modélisée par la fonction f , définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(t)=6t\times e^{-t}$ où t est le temps exprimé en heure.

1. Montrer que $f'(t)=(6-6t)\times e^{-t}$. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;10]$.

2. Quelle est la concentration maximale de ce médicament (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée au dixième près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

Le produit devient indétectable lorsque sa concentration est inférieure à 0,01 mg/L. Le programme proposé ci-contre permet de déterminer le temps, à 0,1 heure près, à partir duquel le produit sera indétectable.

3. Compléter cet algorithme puis, à l'aide de votre calculatrice, donner la valeur que ce programme affiche.

```
from math import*
def f(t):
    return 6*t/exp(t)
t=1
while ......:
    t=t+0.1
print(t)
```

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4$
- $B = \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}^2}$
- $C = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+7} \times \mathrm{e}^{-x-3}}{\mathrm{e}^{2x+3}}$
- $D = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}}$
- $E = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-4}$
- $F = \dfrac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}}$
- $G = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$
- $H = \left(e^{3x+2}\right)^2$

Exercice 2

Développer et simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 5)$
- $B = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)$
- $C = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$
- $D = (\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x + 5)$
- $E = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 3)$
- $F = (\mathrm{e}^x + 1)(2 - \mathrm{e}^{-x})$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $\mathrm{e}^x = 1$ *b)* $\mathrm{e}^x = 0$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1}$ *b)* $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36}$ *c)* $\mathrm{e}^{2x-3} = 1$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $(3x - 5)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ *b)* $4\mathrm{e}^{-x} + 7x\mathrm{e}^{-x} = 0$
4) *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + 6X - 7 = 0$
   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x - 7 = 0$
5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 4 = 0$ *b)* $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x + 3 = 0$

Exercice 5

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{x+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$
2) Montrer que pour tout réel x, on a : $1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$

Exercice 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2\mathrm{e}^x$
- $i(x) = (x^2 + 3\,x + 5)\,\mathrm{e}^x$.
- $l(x) = 10\mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$.
- $g(x) = 2x + \mathrm{e}^x$
- $j(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
- $m(x) = (2x - 3)\mathrm{e}^{-0{,}1x}$.
- $h(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$
- $k(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe
Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse :

1) Le point $A(0\,;\,1)$ appartient la courbe $\mathscr{C}$.
2) Pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$
3) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1{,}5$ est horizontale.
4) La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - 8\,x)\,\mathrm{e}^{-2\,x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal

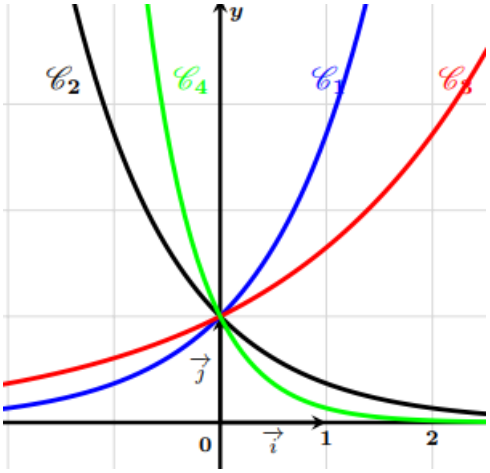
1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$
Démontrer que $f(x) + f(-x) = 2$

Exercice 10

On a tracé les courbes de quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On sait que

- $f(x) = \mathrm{e}^x$
- $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$
- $h(x) = \mathrm{e}^{0.5x}$
- et $i(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

Associer à chaque fonction la courbe