Définition Fonction dérivée

On dit qu'une fonction est **dérivable sur l'intervalle I** si elle est dérivable en tout réel a de I.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. On appelle **fonction dérivée de la fonction f**, et on la note f', la fonction qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$.

Théorème Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction « somme » $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I. Et on a, pour tout réel x de I, $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$. On peut aussi noter $(u+v)' = u'+v'$.

Théorème Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction « produit » $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I. Et on a, pour tout réel x de I, $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$. On note aussi $(uv)' = u'v + v'u$.

Théorème Dérivée de l'inverse d'une fonction

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I. On a, pour tout réel x de I, $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

On note $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Théorème Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$,

alors la fonction « quotient » $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I. Et on a, pour tout réel x de I, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v^2(x)}$. On note $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Définition Composition de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J. La fonction composée de g suivie de f est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$.

$$x \xmapsto{g} g(x) = X \xmapsto{f} f(X)$$
$$x \xmapsto{\qquad h \qquad} f(g(x))$$

Théorème Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels tels que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à l'intervalle J. Alors la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I, et on a pour tout réel x de I, $h'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Propriétés Existence et unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\bullet\ f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \bullet\ f' = f$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On la note exp.

Propriété Exponentielle d'une somme

Pour tous réels a et b : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Propriétés Exponentielle, opposé, différence et puissance

On déduit de la propriété précédente que :

- Pour $a \in \mathbb{R}$: $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$: $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Définition Nombre e

Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle.

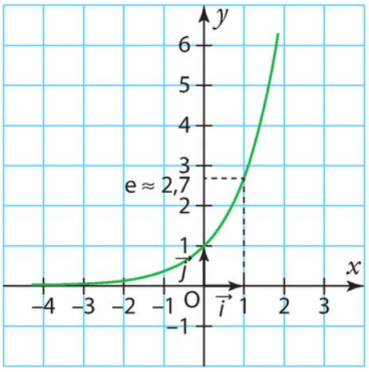
$$\exp(1) = e$$

Notation Les propriétés algébriques précédentes sont analogues aux règles de calculs des puissances, on introduit donc une nouvelle notation : $\exp(x) = e^x$.

Propriétés Nouvelle écriture et propriétés algébriques

Les propriétés précédentes deviennent :

- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $e^a \neq 0$: $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $(e^a)^n = e^{na}$



Propriété Signe de l'exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$

Propriété Variations de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété Exponentielle d'une fonction affine

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction affine de la forme $u(x) = ax + b$, alors f est dérivable et $f'(x) = a \times e^{u(x)} = a \times f(x)$.

Propriété Fonction $t \mapsto e^{kt}$

Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$

- Si $k > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.