Nombres entiers naturels et relatifs

Un nombre **entier naturel** est un nombre entier qui est positif. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. Un nombre **entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif. L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. Le contraire n'est pas vrai. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. $6 \in \mathbb{N}$ et $6 \in \mathbb{Z}$. $-4 \in \mathbb{Z}$ mais $-4 \notin \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}. \qquad \mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}.$$

Application directe

Utilisez de manière pertinente les symboles suivants : $\subset$ / $\not\subset$ / $\in$ / $\notin$.

$-3\ldots\mathbb{N}$ $\quad 4\ldots\mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z}\ldots\mathbb{N}$

$\frac{10}{2}\ldots\mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{5}\ldots\mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{N}\ldots\mathbb{Z}$

$\pi\ldots\mathbb{N}$ $\quad -10\ldots\mathbb{Z}$ $\quad 0,3\ldots\mathbb{N}$

Les propositions sont-elles vraies ou fausses ?
Proposez le cas échéant un contre-exemple.

Si $a \in \mathbb{N}$ alors $a^2 \in \mathbb{N}$. Si $a \in \mathbb{N}$ alors $a^2 \in \mathbb{Z}$.
Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $a^2 \in \mathbb{N}$. Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $a^2 \in \mathbb{Z}$.
Si $a \in \mathbb{N}$ alors $a^3 \in \mathbb{N}$. Si $a \in \mathbb{N}$ alors $a^3 \in \mathbb{Z}$.
Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $a^3 \in \mathbb{N}$. Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $a^3 \in \mathbb{Z}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Proposez le cas échéant un contre-exemple. Lorsque la proposition est vraie, la réécrire sous la forme d'une implication du type « Si … alors… » en utilisant de manière pertinente les symboles adaptés.

- La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.
- La somme de deux entiers naturels est un entier relatif.
- La somme de deux entiers relatifs est un entier naturel.
- La somme de deux entiers relatifs est un entier relatif.

- La différence de deux entiers naturels est un entier naturel.
- La différence e de deux entiers naturels est un entier relatif.
- La différence de deux entiers relatifs est un entier naturel.
- La différence de deux entiers relatifs est un entier relatif.

- Le produit de deux entiers naturels non nuls est un entier naturel.
- Le produit de deux entiers naturels non nuls est un entier relatif.
- Le produit de deux entiers relatifs non nuls est un entier naturel.
- Le produit de deux entiers relatifs non nuls est un entier relatif.

- Le quotient de deux entiers naturels non nuls est un entier naturel.
- Le quotient de deux entiers naturels non nuls est un entier relatif.
- Le quotient de deux entiers relatifs non nuls est un entier naturel.
- Le quotient de deux entiers relatifs non nuls est un entier relatif.

Les nombres entiers relatifs et les quatre opérations élémentaires (rappels)

Exercice 1

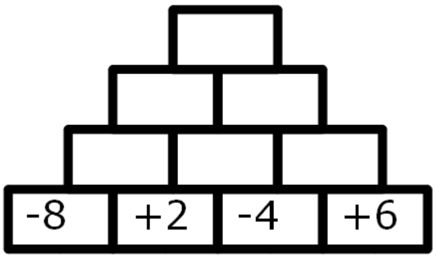
Dans les quatre tableaux proposés ci-dessous, relier chaque expression de la colonne de gauche à l'expression de la colonne de droite qui lui correspond.

(– 12) + (– 4) •	• + 4
(+ 12) + (– 4) •	• – 20
(– 12) + (– 8) •	• – 16
(– 8) + (+ 12) •	• + 12
(+ 8) + (+ 4) •	• + 8

(– 8) + (– 16) •	• (– 11) + (+ 33)
(+ 24) + (– 4) •	• (+ 30) + (– 47)
(– 14) + (– 3) •	• (+ 19) + (+ 1)
(– 7) + (+ 7) •	• (– 11) + (– 13)
(+ 14) + (+ 8) •	• (+ 63) + (– 63)

Compléter la pyramide sachant que le nombre contenu dans une case est égal à la somme des deux nombres contenus dans les deux cases situées en dessous.

Compléter les six calculs proposés ci-dessous afin de rendre les égalités vraies.



(+ 2) + (...) = (+ 7)	(– 5) + (...) = (– 7)	(+ 8) + (...) = (+ 2)
(...) + (+ 1) = 0	(...) + (– 15) = 11	(...) + (– 3) =– 6

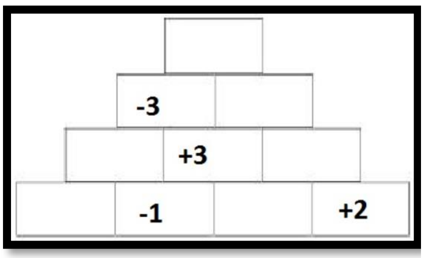
Exercice 2

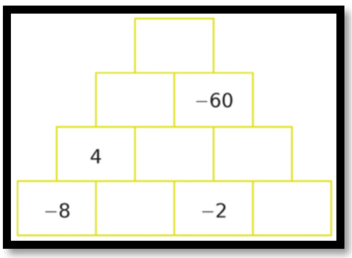
Dans les quatre tableaux relier chaque expression de la colonne de gauche à l'expression de la colonne de droite qui lui correspond.

(+ 5) × (– 4) •	• – 15
(– 5) × (– 3) •	• – 20
(– 3) × (+ 4) •	• – 12
(+ 4) × (+ 4) •	• + 12
(– 4) × (– 3) •	• – 16
(– 5) × (– 4) •	• + 20
(– 5) × (+ 3) •	• + 15
(– 4) × (+ 4) •	• + 16

(+ 5) × (– 12) •	• (– 1) × (+ 20)
(– 8) × (– 3) •	• (+ 12) × (+ 5)
(+ 4) × (– 6) •	• (+ 2) × (+ 12)
(+ 5) × (– 4) •	• (+ 5) × (+ 4)
(+ 2) × (+ 10) •	• (– 3) × (+ 20)
(– 2) × (– 30) •	• (– 12) × (+ 2)

Compléter les pyramides sachant que le nombre contenu dans une case est égal au produit des deux nombres contenus dans les deux cases situées en dessous.





Exercice 3

Recopier et compléter les huit calculs proposés ci-contre afin de rendre les égalités vraies. Dans cette partie de l'exercice, toutes les opérations sont à votre disposition : addition, soustraction, multiplication et division. Ensuite, recopier et effectuer chacun des cinq calculs proposés.

a. $(-4)\ \dots\ (-2) = 8$
b. $(-4)\ \dots\ (-2) = -6$
c. $(-1)\ \dots\ (-1) = 1$
d. $(-1)\ \dots\ (-1) = -2$

e. $(-6)\ \dots\ (-2) = 3$
f. $(-6)\ \dots\ (-2) = -4$
g. $(-4)\ \dots\ 2 = -6$
h. $(-4)\ \dots\ 2 = -2$

$A = 7 + (-6) \times (-6)$
$B = 13 - (+3) \times (-4) - 8$
$C = -30 \div (-9 + 15)$
$D = -3 - 9 \times (-3)$
$E = -3 \times 6 \times (-2 + 8)$

Même consigne : recopier et effectuer chacun des six calculs proposés :

$15 + 5 \times (-8)$
$-10 + 10 \times (-4)$

$(-8) \div 4 - 5$
$(15 + 5) \times (-8)$

$19 - 12 \div (-4)$
$(-8) \div (4 - 5)$

Exercice 4

Compléter le premier carré magique proposé ci-contre sachant que la somme des nombres situés sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est identique. Même consigne pour le second carré magique en changeant le mot « somme » par « produit ».

	− 9	− 2
	− 4	
− 6		

	-25	2
	-10	-100
50	-4	

Exercice 5

Recopier chaque ligne de calcul en ajoutant des parenthèses pour que les égalités soient vraies.

$-28 - 2 \times 4 - 4 = -124$ $\quad$ $-28 - 2 \times 4 - 4 = -28$ $\quad$ $-28 - 2 \times 4 - 4 = -32$

$20 - 100 \div 5 - 3 \times 10 = 15$ $\quad$ $20 - 100 \div 5 - 3 \times 10 = 30$ $\quad$ $20 - 100 \div 5 - 3 \times 10 = -400$

Même consigne avec les deux expressions suivantes :

$-4 \times -5 + 1 - 5 \times -2 = 26$ $\quad$ $-4 \times -5 + 3 - 3 \times 4 - 1 = 19$

Exercice 6

A New-York on annonce une température de 68°F. Convertir cette température en degrés Celsius. Même question avec une température de 23°F annoncée à Washington.

Aux États-Unis, la température T est mesurée en degrés Fahrenheit. Voici la formule pour convertir une température $\mathbf{T}_{°F}$ exprimée en degrés Fahrenheit (°F) en une température $\mathbf{T}_{°C}$ équivalente exprimée en degrés Celsius (°C) :

$$\mathbf{T}_{°C} = \frac{(\mathbf{T}_{°F} - 32) \times 5}{9}$$

Entiers relatifs, notion de multiples et de diviseurs

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$. S'il existe un entier relatif q tel que $a = bq$, alors on dit que a est un **multiple** de b et que b est un **diviseur** de a. On dit aussi que a est **divisible par** b. Pour mémoire, a est divisible par b lorsque le **reste** de la division euclidienne de a par b est égal à 0.

a est **pair** s'il est divisible par 2, c'est-à-dire s'il existe entier relatif q tel que $a = 2q$. a est **impair** s'il n'est pas divisible par 2, c'est-à-dire s'il existe entier relatif q tel que $a = 2q+1$. a est **premier** s'il a exactement deux diviseurs positifs : un et lui-même.

Application directe

On propose l'affirmation suivante : « La somme de 2 entiers consécutifs est toujours un nombre pair ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « La somme de 3 entiers consécutifs est toujours un multiple de 3 ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « Si a et b sont divisibles par c alors leur somme est divisible par c ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « Si a et b sont deux multiples de c alors leur produit est un multiple de c ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « La somme de deux nombres pairs est un nombre pair ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « La somme de deux nombres impairs est un nombre pair ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « Le produit d'un nombre pair par n'importe quel entier est un nombre pair ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair ». Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

On propose l'affirmation suivante : « Si a est divisible par b et si b est divisible par c alors a est divisible par c ». On parle ici de « transitivité » de la divisibilité. Proposer un exemple qui illustre cette propriété. Démontrer ensuite cette propriété.

A l'aide de la méthode du crible d'Eratosthène, retrouver les nombres premiers compris entre 1 et 100. Détailler dans un carré 10 par 10 contenant les cent premiers entiers le fonctionnement de cette méthode.

Décomposition en facteurs premiers, notion de PGCD (rappels)

Tout nombre non premier peut se **décomposer** en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est **unique** à l'ordre des facteurs près. On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1. On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exercice 1

Décomposer 60 en produit de facteurs premiers. Décomposer 126 en produit de facteurs premiers. Réduire la fraction $\frac{60}{126}$. Reprendre le même type de travail avec la fraction $\frac{78}{42}$.

Exercice 2

Dresser la liste des diviseurs de 60. Dresser la liste des diviseurs de 126. Dresser la liste des diviseurs communs à 60 et à 126. Préciser quel est le plus grand de ces diviseurs communs appelé PGCD. Proposer un commentaire.

Dresser la liste des diviseurs de 42. Dresser la liste des diviseurs de 78. Dresser la liste des diviseurs communs à 42 et à 78. Préciser quel est le plus grand de ces diviseurs communs appelé PGCD. Proposer un commentaire.

On considère la fraction $\frac{15}{28}$. Quel est le PGCD de 15 et de 28. Peut-on simplifier cette fraction ?

Déterminer parmi les fractions suivantes celles qui sont irréductibles et réduire celles qui ne le sont pas :

$$\frac{25}{81} \qquad \frac{9}{16} \qquad \frac{22}{15} \qquad \frac{49}{36}$$

Exercice 3

Un ouvrier dispose de plaques d'aluminium de 2,20 mètres de longueur et 1,76 mètres de largeur. Il reçoit la consigne suivante : « découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façons à ne pas avoir de perte ». Quel sera la longueur du côté d'un carré ? Combien de carrés seront découpés ?

Un fleuriste a reçu 1756 roses blanches et 1317 roses rouges. Il désire réaliser des bouquets identiques et veut utiliser toutes les fleurs. Quel est le nombre maximal de bouquets qu'il peut confectionner ? Quelle sera alors la composition du bouquet ?

Un confiseur dispose de 133 bonbons au citron et 95 bonbons à l'orange. Il souhaite constituer des paquets identiques et utiliser tous les bonbons qu'il a à sa disposition. Quel est le nombre maximal de paquets qu'il peut confectionner ? Quelle sera alors la composition d'un paquet ?

Un champ a la forme d'un rectangle de longueur 102 mètres et de largeur 78 mètres. On entoure entièrement ce champ en plantant des peupliers tout au long du pourtour. Les arbres sont régulièrement espacés et la distance qui sépare chaque peuplier de son voisin est un nombre entier de mètres. Il y a un peuplier dans chaque coin. Quelle distance maximale qui sépare deux peupliers consécutifs ? Combien y a-t-il de peupliers ?

Exercice 4

On considère a et b deux nombres entiers tels que $b < a$. Supposons que le nombre k soit un diviseur commun à a et b. On souhaite montrer que k est aussi un diviseur de la différence $a-b$. Ecrire a sous la forme d'un produit. Ecrire b sous la forme d'un produit. Que peut-on dire de la différence $a-b$? Conclure.

La remarque étant valable pour tous les diviseurs communs à a et b, elle est aussi valable pour le plus grand des diviseurs communs, c'est-à-dire pour le PGCD. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante : Si a et b sont deux nombres entiers tels que $b < a$ Alors $PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$.

A l'aide de la propriété précédente déterminer un « algorithme » permettant de déterminer « par soustractions successives » le $PGCD(288;126)$. A l'aide de la propriété précédente déterminer un « algorithme » permettant de déterminer « par soustractions successives » le $PGCD(145;100)$

Exercice 5

On a fait apparaître ci-dessous les soustractions successives. Remplacer les deux premières soustractions par une division euclidienne dont vous préciserez le diviseur, le dividende, le quotient et le reste. Faire de même pour les trois soustractions suivantes. Faire de même pour les deux dernières soustractions.

$$\begin{array}{r} 288 \\ -\;126 \\ \hline 162 \end{array} \quad \begin{array}{r} 162 \\ -\;126 \\ \hline 36 \end{array} \quad \begin{array}{r} 126 \\ -\;36 \\ \hline 90 \end{array} \quad \begin{array}{r} 90 \\ -\;36 \\ \hline 54 \end{array} \quad \begin{array}{r} 54 \\ -\;36 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ -\;18 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ -\;18 \\ \hline 0 \end{array}$$

Division 1 Division 2 Division 3

On a fait apparaître ci-dessous les soustractions successives. Remplacer les deux premières soustractions par une division euclidienne dont vous préciserez le diviseur, le dividende, le quotient et le reste. Faire de même pour les quatre soustractions suivantes. Faire de même pour les deux dernières soustractions.

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\;45 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 55 \\ -\;45 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ -\;10 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \\ -\;10 \\ \hline 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ -\;10 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ -\;10 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ -\;5 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ -\;5 \\ \hline 0 \end{array}$$

Division 1 Division 2 Division 3

Nous admettons à la propriété suivante : « Si p et q sont deux nombres entiers tels que $p = q \times k + r$ Alors $PGCD(p;q) = PGCD(q;r)$ où r est le reste de la division euclidienne de p par q ».

A l'aide de la propriété précédente déterminer un « algorithme » permettant de déterminer « par divisions euclidiennes successives » le $PGCD(190;44)$ puis le $PGCD(5148;1386)$.

Nombres décimaux, nombres rationnels

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des décimaux est noté ID. Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
Tout entier est décimal, et tout décimal est rationnel. On a donc les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q}$.

Application directe

0,28 est un décimal : pourquoi ? 6 est un décimal : pourquoi ? 6,28 est un décimal : pourquoi ?

$\frac{2}{5}$ est un décimal : pourquoi ? $\frac{3}{4}$ est un décimal : pourquoi ? $\frac{7}{8}$ est un décimal : pourquoi ?

$\frac{1}{3}$ est-il un décimal ? Pourquoi ?

Un tiers n'est pas un nombre décimal, une démonstration « par l'absurde »

Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un décimal. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$. En déduire une absurdité mettant en défaut la supposition initiale. Conclure.

Application directe

Les nombres 0,4 / 0,75 / 0,875 sont rationnels : pourquoi ? Détaillez votre raisonnement.
Les nombres $0,\overline{33}$ / $0,\overline{11}$ / $0,\overline{55}$ sont rationnels : pourquoi ? Détaillez votre raisonnement.

On se demande si le nombre $A = 1,\overline{353535}$ est un rationnel. Pour cela on suit le raisonnement suivant : que vaut $100A$? Que vaut $100A - A$? A peut-il s'écrire sous la forme d'une fraction ? Laquelle ?

On se demande si le nombre $B = 27,\overline{159159}$ est un rationnel. Pour cela on suit le raisonnement suivant : que vaut $1000B$? Que vaut $1000B - B$? B peut-il s'écrire sous la forme d'une fraction ? Laquelle ?

On se demande si le nombre $C = 0,\overline{12341234}$ est un rationnel. Pour cela on suit le raisonnement suivant : que vaut $10000C$? Que vaut $10000C - C$? C peut-il s'écrire sous la forme d'une fraction ? Laquelle ?

On se demande si le nombre $D = 3,\overline{124857124857}$ est un rationnel. Pour cela on suit le raisonnement suivant : que vaut $1000000D$? Que vaut $1000000D - D$? D peut-il s'écrire sous la forme d'une fraction ? Laquelle ?

Les nombres rationnels et les quatre opérations élémentaires (rappels)

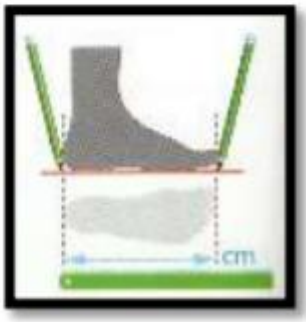
Exercice 1

« Nous allons partager ce bel agneau de 36 kilogrammes, dit le lion au singe et au rat. Puisque nous sommes trois, j'en prends d'abord un tiers : c'est juste. Ensuite, comme roi des animaux, j'en prends la moitié. Enfin, je m'attribue encore le sixième parce que tel est mon plaisir. Après cela, partagez-vous le reste. »

Ce texte est écrit d'après une fable de La Fontaine. Que doit-on en penser ? Justifier la réponse par un ou des calculs fractionnaires.

Exercice 2

Pour calculer sa pointure française, une technique consiste à mesurer la longueur de son pied en centimètres, lui ajouter 1, puis diviser cette somme par la fraction deux tiers. Victor a mesuré la longueur de son pied et a trouvé 25 centimètres.



Quelle est sa pointure française ? Justifier la réponse par un ou des calculs fractionnaires

Exercice 3

Recopier et compléter le carré magique ci-contre de telle sorte que la somme des nombres proposés sur chaque ligne, la somme des nombres proposés sur chaque colonne et la somme des nombres proposés sur chaque diagonale soient égales.

$\frac{20}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{7}$
$\frac{15}{14}$		

Exercice 4

On propose quatre expressions faisant intervenir des expressions rationnelles. Ecrire A et B sous la forme de fractions irréductibles puis C et D sous la forme d'entiers.

$$A=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{4}{7} \qquad B=\frac{6}{5}\div\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{5}\right) \qquad C=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\div\frac{20}{21} \qquad D=\left(2+\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)$$

Exercice 5

Déterminer la forme irréductible des fractions $a=\frac{5148}{1386}$, $b=\frac{2232}{2592}$ et $c=\frac{11232}{4375}$ puis calculer :

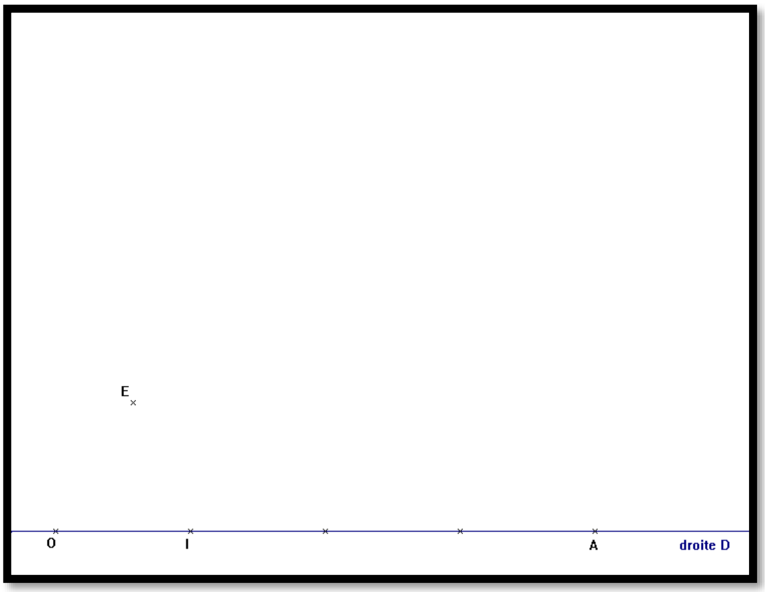
$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \qquad B=\frac{1}{42}+\frac{1}{78} \qquad C=\frac{1}{72}+\frac{1}{84} \qquad D=\frac{1}{5148}+\frac{1}{1386} \qquad E=\frac{1}{42}+\frac{1}{78}+\frac{1}{84}$$

Vers les nombres réels

Point d'abscisse rationnelle

Sur la droite (D) d'origine O on place le point A d'abscisse 4. E est un point non situé sur la droite (D). F est le point de la demi-droite $[OE)$ tel que $OF = 3 \times OE$. La parallèle à la droite (AF) passant par E coupe la droite (D) en B.

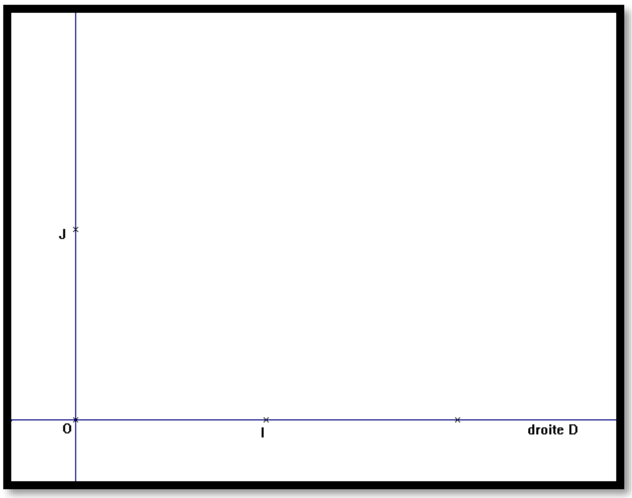
Effectuer la construction, puis démontrer que le point B a pour abscisse le nombre $\frac{4}{3}$.



Point d'abscisse irrationnelle

Sur la droite (Δ) perpendiculaire en O à la droite (D), on place J le point tel que OI = OJ. On construit le point K de telle sorte que OIKJ soit un carré. Le cercle de centre O et de rayon OK coupe la demi-droite $[OI)$ en M.

Effectuer la construction, puis démontrer que le point M a pour abscisse $\sqrt{2}$.



La racine de deux n'est pas un nombre rationnel, une démonstration « par l'absurde »

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ $q \neq 0$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premier entre eux (autrement dit $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible).

Nous allons essayer d'en déduire une absurdité remettant en cause la supposition faite.

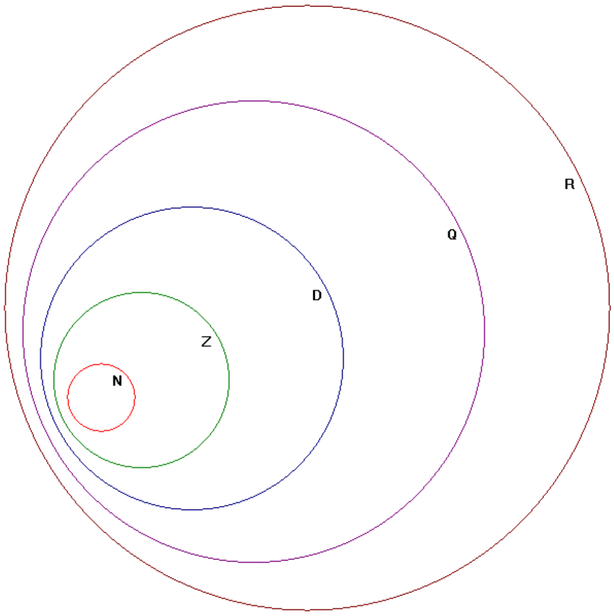
Montrer dans un premier temps que $p^2 = 2q^2$. Que peut-on en déduire sur la parité de p^2 ? Que peut-on en déduire sur la parité de p ?

En déduire qu'il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $q^2 = 2k^2$. Que peut-on en déduire sur la parité de q^2 ? Que peut-on en déduire sur la parité de q ? Quelle conclusion peut-on en tirer ?

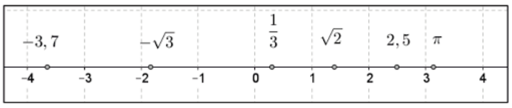
L'ensemble des nombres réels

On a représenté ci-contre :

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs,
- ID , l'ensemble des décimaux,
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels,
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.



Si on considère une droite munie d'une origine O et d'une unité I l'ensemble des nombres réels est l'ensemble des points de cette droite appelée la **droite numérique**.



Exercice d'application directe

Cocher la case lorsque le nombre appartient à l'ensemble de nombre correspondant à cette case :

	0	$3,5$	-7	$\frac{7}{3}$	$\frac{12}{3}$	$4,0$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}$							
ID							
$\mathbb{Q}$							
$\mathbb{R}$							

	$\frac{230}{5}$	$3,14$	$\frac{22}{7}$	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{1000}$
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}$							
ID							
$\mathbb{Q}$							
$\mathbb{R}$							

Recopier et compléter avec l'un des quatre symboles $\in$ / $\notin$ / $\subset$ / $\not\subset$:

- $-2 \ldots \mathbb{Q}$
- $-\frac{5}{2} \ldots \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{N}$
- $\frac{1}{5} \ldots ID$
- $ID \ldots \mathbb{Z}$
- $\pi \ldots ID$
- $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Q}$
- $0,3 \ldots \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \ldots \mathbb{Q}$

Simplification de radicaux

Déterminer l'écriture du nombre $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels.

Déterminer l'écriture du nombre $\sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels.

Effectuer le même travail pour les trois nombres suivants :

$H = \sqrt{50} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$ $\qquad I = \sqrt{245} + \sqrt{605}$ $\qquad J = \sqrt{15925} + \sqrt{468}$

Transformation de l'écriture d'un nombre

Déterminer la nature* des nombres suivants (* pour trouver la nature d'un nombre, on recherche en le simplifiant ou en le modifiant le plus petit ensemble de nombre auquel il appartient).

$-\dfrac{\sqrt{144}}{3}$	$\dfrac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)}{400}$	$-\dfrac{84}{14}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{-25}{\sqrt{100}}$	$3,333$	$-\dfrac{60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$	$4,1\times10^{3}$
$1,333...$	$\dfrac{\sqrt{84}}{2\sqrt{21}}$	$\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{5}$	$(\sqrt{2}+1)^{2}$

Exercice d'application 1

Pour chacun des nombres proposés, indiquer le plus petit ensemble auquel il appartient (vous justifierez votre réponse par une transformation de l'écriture du nombre).

$2,\overline{666}$ $\qquad \dfrac{\left(1+\sqrt{6}\right)\left(1-\sqrt{6}\right)}{2}$ $\qquad \dfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

Exercice d'application 2

Pour chacun des nombres proposés, indiquer le plus petit ensemble auquel il appartient (vous justifierez votre réponse par une transformation de l'écriture du nombre).

$\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{50}}{\sqrt{98}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{75}}{\sqrt{18}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{288}+\sqrt{162}}{\sqrt{98}}$

Après avoir développé, réduit et simplifié l'écriture des quatre nombres A, B, C et D proposés ci-dessous, indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel chacun de ces nombres appartient.

$A = \dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$ $\qquad B = -\dfrac{\sqrt{196}}{7}$ $\qquad C = \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{128}}$ $\qquad D = \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{108}}{\sqrt{147}}$

Exercice d'application 3

Les nombres a et b sont deux entiers naturels. Après avoir développé, réduit et simplifié l'écriture des trois nombres E, F et G proposés ci-dessous, indiquer la nature de chacun d'eux.

$$E=(a+b)^2-(a-b)^2 \qquad F=(a+b)^2+(a-b)^2+(a+b)(a-b) \qquad G=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

Les nombres a, b et c sont trois entiers naturels. Après avoir développé, réduit et simplifié l'écriture des trois nombres A, B et C proposés ci-dessous, indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel chacun de ces nombres appartient.

$$A=\frac{a(b+c)+a(b-c)}{ab} \qquad B=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab} \qquad C=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2+2(a+b)(a-b)}{a^2}$$

Ecriture scientifique d'un nombre

Soit x un nombre décimal non nul. Son **écriture scientifique** est $a\times10^n$ où $n\in\mathbb{Z}$ et a est un nombre décimal tel que $1\leq|a|<10$.

Application directe (rappels)

Relier chacun des nombres de la colonne de gauche à un résultat proposé dans la colonne de droite.

$271{,}8\times10^{-2}$ •	• 2,718
$2\ 718\times10^{-1}$ •	• 2 718
$0{,}271\ 8\times10^{-1}$ •	• 271,8
$0{,}027\ 18\times10^{2}$ •	• 0,271 8
$271\ 800\times10^{-6}$ •	• 0,027 18
$0{,}271\ 8\times10^{3}$ •	• 27,18
$0{,}002\ 718\times10^{6}$ •	• 27 180
$2\ 718\times10^{0}$ •	• 0,271 8

Relier chacun des nombres proposés à son écriture scientifique :

45,68	•
456,8	•
0,4568	•
0,004568	•

•	$4{,}568\times10^{-1}$
•	$4{,}568\times10^{1}$
•	$4{,}568\times10^{-3}$
•	$4{,}568\times10^{2}$

Deux petits problèmes

La vitesse de la lumière est de 3×10^5 kilomètres par secondes. Neptune une planète située à environ 4,5 milliards de kilomètres de la terre. Combien de temps la lumière envoyée par Uranus met-elle pour arriver sur la terre ? La réponse sera donnée en heures et minutes.

La mole correspond à la quantité de matière d'un système contenant environ 6×10^{23} entités élémentaires. Sachant qu'un atome de carbone pèse environ 2×10^{-26} kilogrammes sauriez-vous déterminer la masse d'une mole d'atomes de d'oxygène ? Le résultat sera donné en gramme.

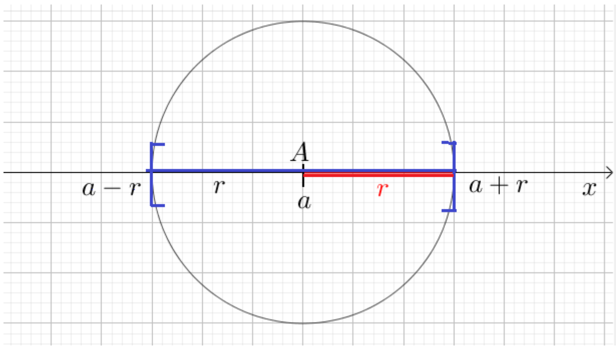
La valeur absolue d'un nombre réel

Soit x un nombre réel. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$ est égale à $\begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Soient a et x deux nombres réels.

On appelle **distance entre les nombres réels** a et x le nombre $|x-a|$. Cette distance est aussi égale à $|a-x|$.

Nous avons ainsi l'équivalence suivante : $x \in [a-r; a+r]$ si et seulement si $|x-a| \leq r$. On parle d'**intervalle centré** en a et de **rayon** r où r est un nombre réel positif.



Application directe

Déterminer la valeur absolue de x dans chacun des cas suivants :

$x = -3$	$x = (-5)^3$	$x = (-1)^5$	$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
$x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$	$x = 1 - \sqrt{2}$	$x = 1 - \sqrt{3}$	$x = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Intervalles centrés sur l'origine

Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inéquation $|x| \leq 6$. La réponse sera donnée sous la forme d'un intervalle, et sera justifiée graphiquement et algébriquement.

Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inéquation $|x| \geq 1$. La réponse sera donnée sous la forme d'un intervalle, et sera justifiée graphiquement et algébriquement.

Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inéquation $1 \leq |x| \leq 2$. La réponse sera donnée sous la forme d'un intervalle, et sera justifiée graphiquement et algébriquement.

Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inéquation $5 \leq |x| \leq 6$. La réponse sera donnée sous la forme d'un intervalle, et sera justifiée graphiquement et algébriquement.

Intervalles centrés mais non centré sur l'origine

Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inéquation $|x-1| \leq 2$. La réponse sera donnée sous la forme d'un intervalle, et sera justifiée graphiquement et algébriquement.

Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inéquation $|x-3| \geq 4$. La réponse sera donnée sous la forme d'un intervalle, et sera justifiée graphiquement et algébriquement.

Représentations graphiques

Décrire chaque intervalle à l'aide d'une inéquation faisant intervenir une valeur absolue.