Les propriétés des égalités

Soient a, b et c trois nombres réels quelconques et d un nombre réel non nul. Nous énonçons les quatre **équivalences** suivantes :

$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$	$a=b \Leftrightarrow a-c=b-c$	$a=b \Leftrightarrow a\times d=b\times d$	$a=b \Leftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{b}{d}$

Le symbole « $\Leftrightarrow$ » signifie « équivaut à ». On peut aussi utiliser l'expression « si et seulement si ».

Un **produit** de deux nombres réels est **nul** si et seulement si l'**un** au moins de ces deux nombres est nul. Cette propriété s'énonce de la manière suivante : $a\times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$.

Une équation d'**inconnue** x est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres. **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x c'est trouver **l'ensemble de ses solutions**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie.

Résolution d'équations

Situation 1

On appellera x le nombre choisi au départ par Alice et Bertrand. On écrira le programme de calcul d'Alice et celui de Bertrand, puis on déterminera la valeur de x pour qu'ils obtiennent tous les deux le même résultat.

Alice et Bertrand affichent un même nombre sur chacune de leur calculatrice.
- Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu.
- Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.

À la fin, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Situation 2

On appellera x le nombre choisi au départ par Arthur et Charlotte. On écrira le programme de calcul d'Arthur et le programme de calcul de Charlotte, puis on déterminera la valeur de x pour qu'ils obtiennent tous les deux le même résultat.

Arthur et Charlotte choisissent un même nombre. Arthur le multiplie par 10 puis soustrait 2 au résultat obtenu. Charlotte le multiplie par 8 et ajoute 7 au résultat obtenu. Ils obtiennent tous les deux le même résultat.
Quel nombre Arthur et Charlotte avaient-ils choisi au départ ?

Situation 3

Monsieur A applique le programme suivant : « je multiplie par 8 et j'ajoute 7 ». Monsieur B applique le programme suivant : « je multiplie par 6 et j'ajoute 13 ». Monsieur C applique le programme suivant : « je multiplie par 3 et j'ajoute 30 ». Si A et B obtiennent le même résultat à l'issue de leur programme respectif, à quel nombre avaient-ils pensé au départ ? Si A et C obtiennent le même résultat à l'issue de leur programme respectif, à quel nombre avaient-ils pensé au départ ? Si B et C obtiennent le même résultat à l'issue de leur programme respectif, à quel nombre avaient-ils pensé au départ ? Préciser la nature de chaque solution obtenue.

Situation 4

Pour combien de places de cinéma achetées le tarif 1 sera-t-il le même que le tarif 2 ? Justifier.

Un cinéma propose deux tarifs.
Tarif 1 : 7,50 € la place.
Tarif 2 : 5,25 € la place sur présentation d'une carte d'abonnement de 27 € valable un an.

Pour combien de séances de cinéma achetées le tarif A sera-t-il le même que le tarif B ? Justifier.

Le ciné-club d'un village propose deux tarifs :
Tarif A : une carte d'adhésion pour l'année coûtant 21 euros, puis 1,5 euros par séance ;
Tarif B : 5 euros par séance sans carte d'adhésion.

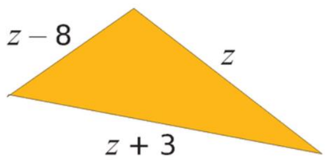
Pour combien de kilomètres parcourus, le tarif payé avec l'entreprise « Vitlivré » sera-t-il le même que le tarif payé avec l'entreprise « Rapido » ?

Pour transporter des enseignes, une société souhaite comparer les tarifs de deux entreprises : l'entreprise « Vitlivré » propose une somme de 3,20 € par kilomètre parcouru, tandis que l'entreprise « Rapido » propose un forfait de 180 € puis une somme de 2 € par kilomètre parcouru.

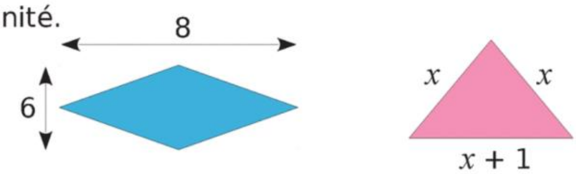
Chaque réponse sera justifiée par la mise en place d'une équation modélisant le problème et sa résolution détaillée.

Situation 5

Trouve la valeur de z sachant que le périmètre du triangle ci-contre vaut 61.Les mesures sont dans la même unité.



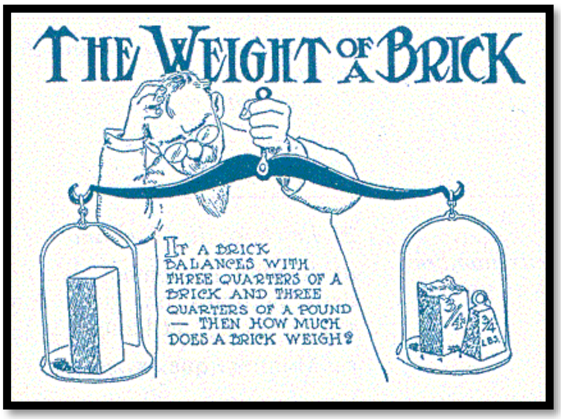
Soient le losange et le triangle isocèle ci-dessous. Les mesures sont dans la même unité.



Trouve la valeur de x telle que le périmètre du losange soit égal au double de celui du triangle.

Situation 6

Une brique est équilibrée par les trois quarts d'une même brique et les trois quarts d'un kilogramme. Combien pèse cette brique ?



« Bien le bonjour, Monsieur l'agent, dit Mr Mac Guire. Pouvez-vous me dire l'heure ? Mais bien sûr, répondit l'agent qui jouissait d'une réputation de mathématicien. Ajoutez au quart du temps depuis minuit, la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte. »

Quatre voleurs se partagent le montant de leur cambriolage. Le premier prend la moitié du butin moins 3000 euros. Le deuxième en prend le tiers moins 1000 euros. Le troisième en prend exactement le quart. Le quatrième en prend le cinquième plus 600 euros. Quel est le montant du butin ? Quelle est la part reçue par chacun d'entre eux ? Modéliser le problème par une équation.

Développement, factorisation et identités remarquables

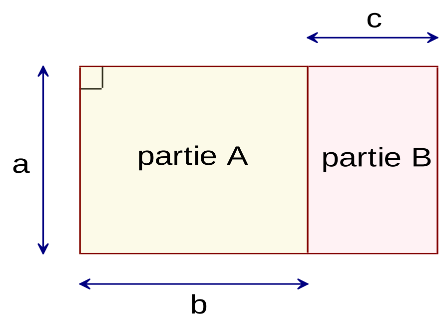
Soient a , b , c et d quatre nombres réels quelconques. On a les égalités suivantes :

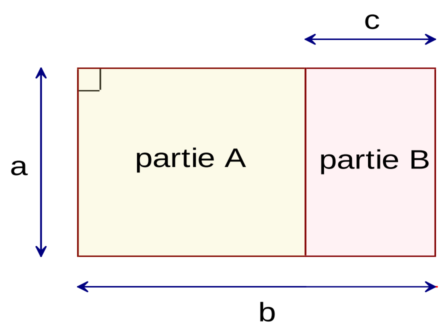
$$a(b+c)=ab+ac \qquad a(b-c)=ab-ac \qquad (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Lorsqu'on effectue une lecture de gauche à droite de ces égalités on réalise un **développement**. Lorsqu'on effectue une lecture de droite à gauche de ces égalités une **factorisation**. Pour les deux premières formules on parle de **distributivité simple**. Pour la troisième on parle de **double distributivité**. La déduit de la formule de double distributivité trois **identités remarquables**.

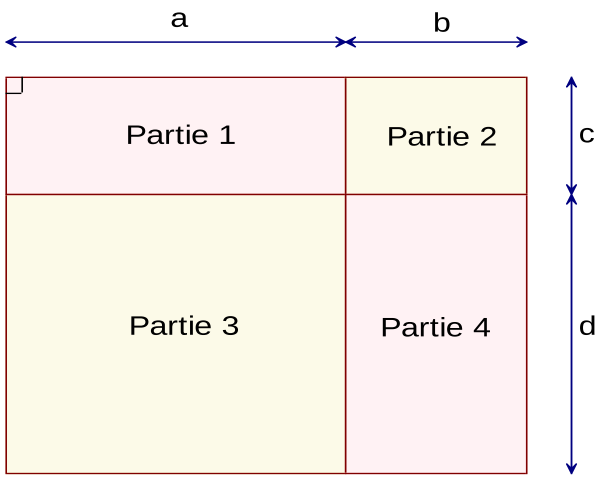
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Application directe



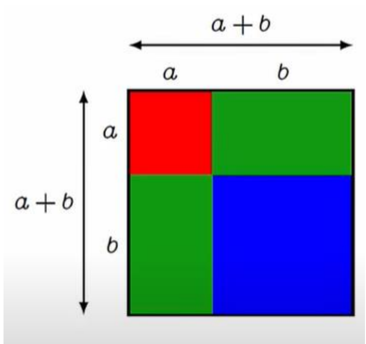


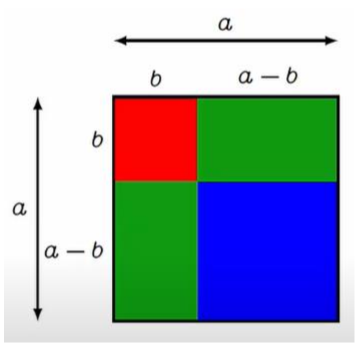
Les trois figures proposées ci-dessus et ci-contre illustrent trois égalités proposées en début de page : lesquelles et pourquoi ?

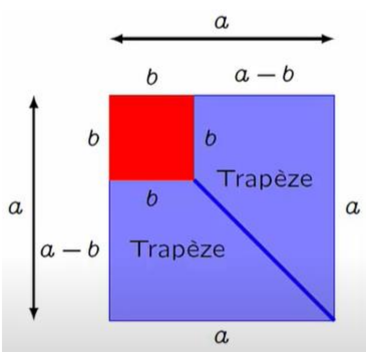


La formule de double distributivité permet de retrouver les trois identités remarquables : comment ?

Les trois figures proposées ci-dessous illustrent trois égalités proposées en début de page : lesquelles et pourquoi ?







Exercices d'application directe

Exercice 1

Soit x un nombre réel quelconque. Vérifier que les trois écritures proposées sur chaque ligne correspondent à la même expression algébrique :

$A=(x-3)^2-4$ $\quad B=x^2-6x+5$ $\quad C=(x-1)(x-5)$

$D=(x-2)(x+8)$ $\quad E=(x+3)^2-25$ $\quad F=x^2+6x-16$

$G=-x^2+2x+8$ $\quad H=(x+2)(4-x)$ $\quad I=9-(x-1)^2$

$J=x^2+4x-21$ $\quad K=(x+2)^2-25$ $\quad L=(x-3)(x+7)$

$M=(6-x)^2+x^2$ $\quad N=2(x-3)^2+18$ $\quad P=2x^2-12x+36$

Exercice 2

Recopier et compléter les égalités suivantes :

$(x+\dots)^2=\dots+6x+\dots$ $\quad (\dots-\dots)^2=4x^2-\dots+25$ $\quad (7x-\dots)(7x+\dots)=\dots-64$

$(\dots+1)^2=9x^2+\dots+\dots$ $\quad (6x-\dots)^2=\dots-\dots+16$ $\quad (\dots-1)(\dots+1)=81x^2-\dots$

$(3x+\dots)^2=\dots+\dots+25$ $\quad (2x-\dots)^2=\dots-24x+\dots$ $\quad (\dots\ \dots\ \dots)^2=\dots-16x+16$

$49x^2+\dots+25=(\dots\ \dots\ \dots)^2$ $\quad 4x^2-\dots=(\dots-\dots)(\dots+1)$ $\quad (\dots\ \dots\ \dots)(\dots\ \dots\ \dots)=121x^2-4$

Exercice 3

Recopier et compléter les égalités suivantes :

$x^2+2\times\dots\times\dots+16=(\dots+\dots)^2$ $\quad 81x^2+2\times\dots\times\dots+36=(\dots+\dots)^2$ $\quad 36x^2-2\times\dots\times\dots+49=(\dots-\dots)^2$

$64x^2-1=(\dots+\dots)(\dots-\dots)$ $\quad 9x^2+2\times\dots\times\dots+\dots=(\dots+4)^2$ $\quad 49x^2-2\times\dots\times\dots+\dots=(\dots-9)^2$

$\dots-64=(\dots+\dots)(3x-\dots)$ $\quad x^2-\dots=(\dots+7)(\dots-\dots)$ $\quad \dots+6x+\dots=(x+\dots)^2$

$4x^2-\dots+25=(\dots-\dots)^2$ $\quad \dots-64=(7x-\dots)(7x+\dots)$ $\quad 9x^2+\dots+\dots=(\dots+1)^2$

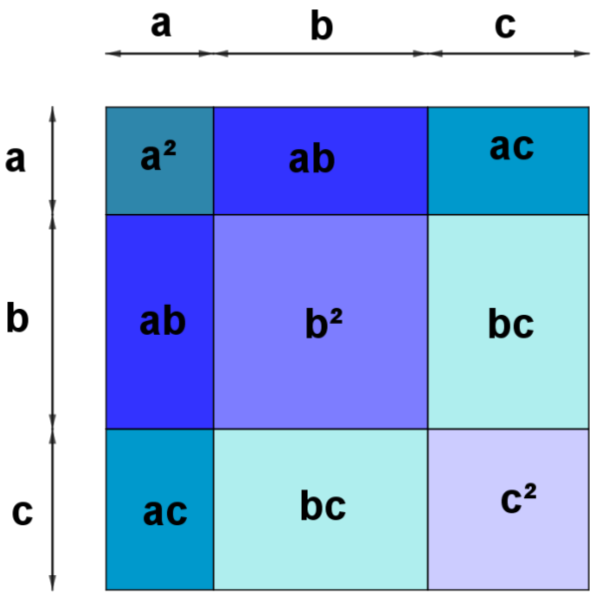
$\dots-\dots+16=(6x-\dots)^2$ $\quad 81x^2-\dots=(\dots-1)(\dots+1)$ $\quad \dots-4=(3x-\dots)(3x+\dots)$

Le carré de la somme de trois nombres

On cherche à calculer pour tout nombre réel a, b et c le carré de la somme de ces trois nombres c'est-à-dire on cherche à développer et à réduire l'expression $(a+b+c)^2$.

Soient x et c deux nombres réels, commencer par développer $(x+c)^2$. En posant $x=a+b$, où a et b sont deux nombres réels, en déduire la forme développée et réduite de $(a+b+c)^2$.

Envisager pour terminser un commentaire en vous basant sur la figure ci-contre.

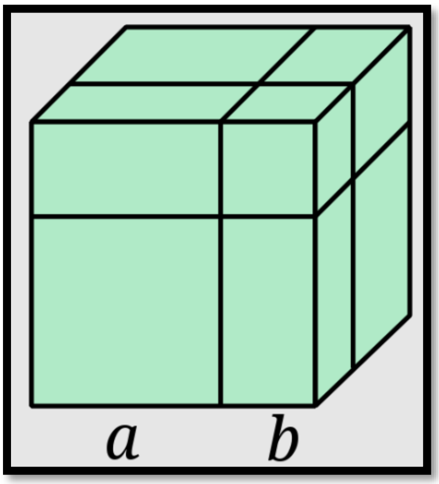


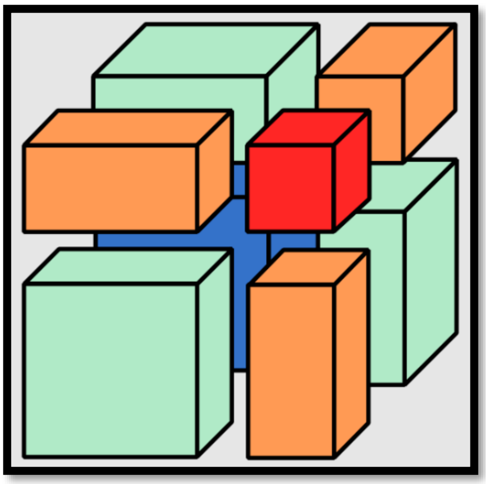
Il semblerait que le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 soit toujours un carré parfait. Vérifier sur deux exemples. Développer et réduire le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 en prenant x le plus petit. Développer et réduire $(x^2+3x+1)^2$. Conclure…

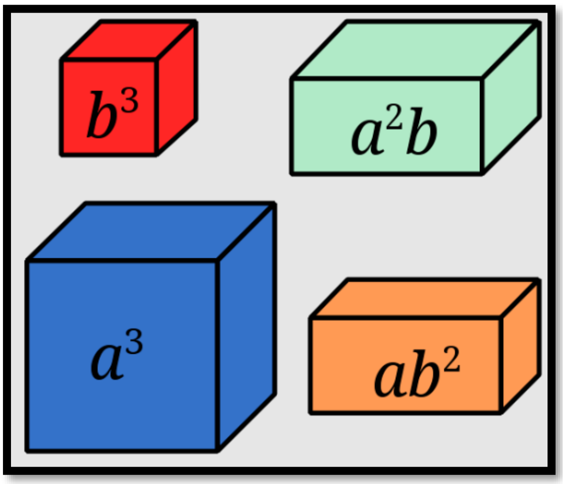
Le cube de la somme de deux nombres

On cherche à calculer pour tout nombre réel a et b le cube de la somme de ces deux nombres c'est-à-dire développer et réduire l'expression $(a+b)^3$.

A l'aide des trois dessins proposés ci-contre et ci-dessous conjecturer géométriquement la réponse à la question posée. Ensuite, en écrivant $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$, démontrer la conjecture par le calcul littéral.







Des lettres et des nombres

Sauriez-vous retrouver, à l'aide de l'égalité proposée ci-contre, l'expression de la température exprimée en degrés Fahrenheit en fonction de la température exprimée en degrés Celsius ?

Aux États-Unis, la température T est mesurée en degrés Fahrenheit. Voici la formule pour convertir une température $\mathbf{T}_{°F}$ exprimée en degrés Fahrenheit (°F) en une température $\mathbf{T}_{°C}$ équivalente exprimée en degrés Celsius (°C) :

$$\mathbf{T}_{°C} = \frac{(\mathbf{T}_{°F} - 32) \times 5}{9}$$

En déduire les températures, exprimées en degrés Fahrenheit, du gel et de l'évaporation de l'eau.

Des lettres et des nombres, encore…

On rappelle que pour calculer sa pointure française, une technique consiste à mesurer la longueur de son pied en centimètres, lui ajouter 1, puis diviser cette somme par la fraction deux tiers. On note P la pointure et L la longueur du pied exprimée en centimètres. Exprimer dans un premier temps P « en fonction de » L. En déduire, dans un second temps, L en fonction de P.

Victor a une pointure française égale à 39. Sauriez-vous retrouver la longueur de son pied ?

Uniquement des lettres

On note v, d et t respectivement la vitesse, la distance et le temps exprimés dans des unités compatibles. Exprimer v « en fonction de » d et t. Exprimer d « en fonction de » v et t. Exprimer t « en fonction de » d et v.

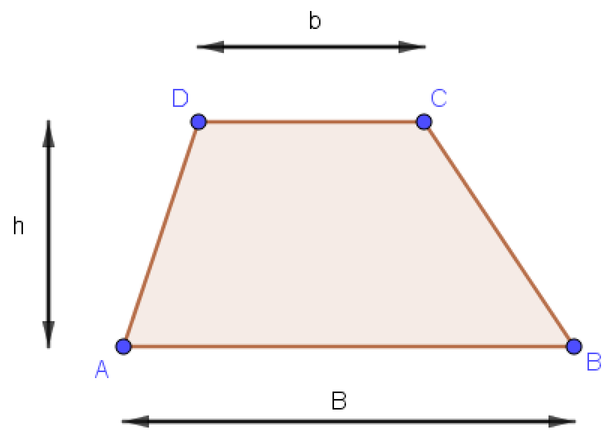
Dans un circuit électrique on note U, R et I respectivement la tension, la résistance et l'intensité exprimées dans des unités compatibles. Exprimer U « en fonction de » R et I. Exprimer R « en fonction de » U et I. Exprimer I « en fonction de » U et R.

On note s, b et h respectivement la surface, la longueur de la base et la longueur de la hauteur d'un triangle exprimées dans des unités compatibles. Exprimer s « en fonction de » b et h. Exprimer b « en fonction de » s et h. Exprimer h « en fonction de » s et b.

On note v, r et h respectivement le volume, le rayon de base et la hauteur d'un cône de l'espace exprimés dans des unités compatibles. Exprimer v « en fonction de » r et h. Exprimer r « en fonction de » v et h. Exprimer h « en fonction de » v et r.

Uniquement des lettres, encore…

On note s, b, B et h respectivement la superficie, la petite base, la grande base et la hauteur d'un trapèze (quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles). Exprimer s « en fonction de » b, B et h (on s'aidera d'un découpage). Exprimer h « en fonction de » b, B et s. Exprimer b « en fonction de » s, B et h. Exprimer B « en fonction de » s, b et h.



Vers les équations « produit nul »

On propose ci-dessous un QCM. Pour chaque question posée, entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Une fois ce travail effectué, envisager un commentaire.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
L'égalité $3x=0$ est vérifiée pour :	$x=0$	$x=-3$	$x=-1$
L'égalité $3+x=0$ est vérifiée pour :	$x=0$	$x=3$	$x=-3$
L'égalité $3x=5$ est vérifiée pour :	$x=5-3$	$x=\dfrac{3}{5}$	$x=\dfrac{5}{3}$
L'équation $\dfrac{x}{3}=2$ est vérifiée pour :	$x=2+3$	$x=\dfrac{2}{3}$	$x=2\times 3$
L'équation $x+(x-2)=0$ est vérifiée pour :	$x=0$	$x=2$	$x=1$
L'équation $x\times(x-2)=0$ est vérifiée pour :	$x=0$	$x=2$	$x=1$
L'équation $(x-2)+(x+1)=0$ est vérifiée pour :	$x=\dfrac{1}{2}$	$x=2$	$x=-1$
L'équation $(x-2)\times(x+1)=0$ est vérifiée pour :	$x=\dfrac{1}{2}$	$x=2$	$x=-1$

Application directe

1. Résoudre l'équation $(x+7)+(x-4)=0$. Résoudre l'équation $(x+7)\times(x-4)=0$.
2. Résoudre l'équation $(2x-3)+(3x+4)=0$. Résoudre l'équation $(2x-3)\times(3x+4)=0$.
3. Envisager un commentaire sur les quatre équations proposées.

Gestion correcte des parenthèses

Résoudre, lorsque cela est possible les équations proposées ci-dessous :

$(x-5)(x+2)=0$ $\quad$ $(4-x)(x-7)=0$ $\quad$ $x(x+6)=0$

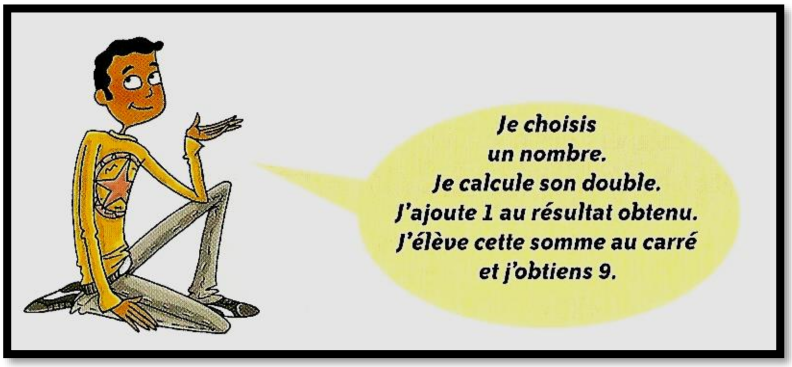
$(2x-7)(3x+9)=0$ $\quad$ $(3x-1)(2x+3)=0$ $\quad$ $7x(4x-1)=0$

$(-2x+3)(6-x)=0$ $\quad$ $(4x+1)-(x-4)=0$ $\quad$ $(-2x+4)+(x-8)=0$

$-(-2x+3)+(x-6)=0$ $\quad$ $(x-1)(x+2)=3$ $\quad$ $(5x+6)(7-8x)=9$

Une équation des solutions

Ecrire une équation qui traduit fidèlement les propos de ce jeune garçon. Résoudre cette équation. On rappelle que résoudre une équation c'est trouver « toutes » les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie.



Les identités remarquables au service de la recherche des solutions

J'ajoute trois au double du nombre auquel je pense, j'élève le tout au carré et j'obtiens quatre. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) au(x)quel(s) j'ai pensé au départ ?

J'ajoute deux au triple du nombre auquel je pense, j'élève le tout au carré et j'obtiens seize. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) au(x)quel(s) j'ai pensé au départ ?

Résoudre l'équation $(x+1)^2 = 25$. Résoudre l'équation $(x-1)^2 = 36$. Résoudre l'équation $(2x+3)^2 = 49$. Résoudre l'équation $(3x-4)^2 = 64$.

Vers les équations dites « équations carrées »

Des solutions entières

Je pense à un nombre, je l'élève au carré et j'obtiens quatre-vingt-un. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ? Je pense à un nombre, je l'élève au carré et j'obtiens cent vingt et un. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ? Le triple du carré d'un nombre est égal à douze. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ?

Des solutions irrationnelles

Je pense à un nombre, je l'élève au carré et j'obtiens deux. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ? Je pense à un nombre, je l'élève au carré et j'obtiens trois. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ?

Plusieurs situations pour s'entrainer

Résoudre chaque équation. On donnera chaque solution sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux nombres entiers relatifs, b étant le plus petit possible.

$x^2 = 8$	$x^2 = 20$	$x^2 = 50$	$x^2 = 75$
$x^2 = 32$	$x^2 = 72$	$x^2 = 80$	$x^2 = 125$
$x^2 = 48$	$x^2 = 180$	$x^2 = 288$	$x^2 = 147$

Les propriétés des inégalités

Soient a, b et c trois nombres réels quelconques et d un nombre réel non nul. Nous énonçons les quatre **équivalences** suivantes (valables aussi bien pour des inégalités strictes que larges) :

$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$	$a<b \Leftrightarrow a-c<b-c$	Si $d>0$ $a<b \Leftrightarrow a\times d<b\times d$ Si $d<0$ $a<b \Leftrightarrow a\times d>b\times d$	Si $d>0$ $a<b \Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{d}$ Si $d<0$ $a<b \Leftrightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{d}$

Soient a, b, c et d quatre nombres réels. Si $a<b$ et $c<d$ alors $a+c<b+d$.

Application directe

La problématique est la suivante : « Que se passe-t-il si l'on ajoute ou si l'on retranche **le même** nombre aux deux membres d'une inégalité ? ». A l'aide du tableau ci-contre, apporter une réponse à la problématique.

Nombre 1	Nombre 2	Comparaison
$a=20$	$b=50$	$a\leq b$
$a+1=21$	$b+1=51$	$a+1\leq b+1$
$a-1=19$	$b-1=49$	$a-1\leq b-1$

La problématique est la suivante : « Que se passe-t-il si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une inégalité par **le même** nombre ? ». A l'aide de deux tableaux ci-dessous, apporter une réponse à la problématique.

Nombre 1	Nombre 2	Comparaison
$a=20$	$b=50$	$a\leq b$
$2\times a=40$	$2\times b=100$	$2\times a\leq 2\times b$
$-3\times a=-60$	$-3\times b=-150$	$-3\times a\geq -3\times b$

Nombre 1	Nombre 2	Comparaison
$a=20$	$b=50$	$a\leq b$
$a\div 4=5$	$b\div 4=12{,}5$	$a\div 4\leq b\div 4$
$a\div(-5)=-4$	$b\div(-5)=-10$	$a\div(-5)\geq b\div(-5)$

On considère ci-contre douze inégalités numérotées de « 1 à 6 » puis de « a à f ». Associer à chaque numéro une lettre de telle sorte que les deux inégalités soient équivalentes. Indiquer les étapes permettant de passer d'une inégalité à l'autre.

1. $7-x\leq 6$
2. $7+x\leq 6$
3. $7-x\geq -6$
4. $-7-x\geq 6$
5. $-x\div 7\leq 6$
6. $0{,}5x\leq 21$

a. $x\leq 42$

b. $x\leq 13$

c. $x\geq 1$

d. $x\leq -13$

e. $x\leq -1$

f. $x\geq -42$

Techniques de résolution d'une inéquation

Situation 1

$2x-7\geq -1$ $\quad$ $3x+1\geq 7$ $\quad$ $7x+10\leq 2x+5$ $\quad$ $3x+5\leq -x-3$

$-x-1\geq 3x+15$ $\quad$ $3x+5\geq 4x+8$ $\quad$ $4x+3\leq -2x+43$ $\quad$ $-2x+3\geq -x+2$

Résoudre les inéquations proposées ci-dessus. Indiquer toutes les étapes.

Représenter ensuite graphiquement l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Situation 2

$3(x-5)\leq 5x+7$ $\quad$ $5x+3\leq 2(x-12)$

$-7(x-11)\geq -5x-5$ $\quad$ $2(x+1)\geq 5-(2x-1)$

Résoudre les inéquations proposées ci-dessus. Indiquer toutes les étapes.

Représenter ensuite graphiquement l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Résolution de problèmes

Situation 1

On appelle x le nombre de DVD loués. A partir de quelle valeur de x a-t-on intérêt à choisir l'option B. Justifier en proposant la résolution d'une inéquation.

Simon désire louer des DVD chez Vidéomat qui propose les deux tarifs suivants de location :

Option A : Tarif à 3€ par DVD loué.

Option B : Une carte d'abonnement de 15 € pour 6 mois avec un tarif de 1,5 € par DVD loué.

Situation 2

Un parc de loisir propose plusieurs tarifs. On appelle x le nombre d'entrées et on se pose deux questions. A partir de combien d'entrées la formule B est-elle plus avantageuse que la formule A ? A partir de combien d'entrées la formule C est-elle plus avantageuse que la formule B ? On justifiera en proposant la résolution de deux inéquations.

- Formule A : 7 € par entrée
- Formule B : un abonnement annuel de 35 €, puis 4,50 € par entrée

a. À partir de combien d'entrées la formule B est-elle plus avantageuse que la formule A ?

- Formule C : un abonnement annuel de 143 € pour un nombre illimité d'entrées

b. À partir de combien d'entrées la formule C est-elle plus avantageuse que la formule B ?

Résolution de problèmes (suite)

Situation 1

Deux entreprises de location de matériel médical louent une même machine aux tarifs suivants :

- Tarif A = 300 € par jour de location.
- Tarif B = un forfait de 1000 € puis 200 € par jour de location.

Dans la suite du problème x désigne le nombre de jours de location. Déterminer par résolution d'une inéquation la durée de location pour laquelle le tarif A est plus intéressant que le tarif B.

Situation 2

Le lièvre et la tortue disputent une course sur une piste qui mesure 100 mètres.

- La tortue parcourt 0,5 mètre en une seconde et part avec 40 mètres d'avance sur le lièvre
- Le lièvre parcourt 2,5 mètres en une seconde.

On appelle t le nombre de secondes écoulées.

1. Par résolution algébrique d'une inéquation déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la tortue.

2. Par résolution algébrique d'une inéquation déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la ligne d'arrivée.

3. Par résolution algébrique d'une inéquation déterminer au bout de combien de temps la tortue aura dépassé la ligne d'arrivée. Le résultat sera converti en minutes.

Situation 3

Une voiture, un cycliste et un piéton effectuent une course sur un trajet reliant une ville A et une ville B distantes de 90 kilomètres.

- La voiture se déplace à une vitesse de 90 km/h.
- Le cycliste part avec 30 kilomètres d'avance et se déplace à la vitesse de 50 km/h.
- Le piéton part avec 40 kilomètres d'avance et se déplace à la vitesse de 10 km/h.

On appelle t le temps écoulé exprimé en heures.

1. Déterminer au bout de combien de temps la voiture dépassera le cycliste.

2. Déterminer au bout de combien de temps la voiture dépassera le piéton.

3. Déterminer au bout de combien de temps le cycliste dépassera le piéton.

4. Qui gagne la course ? En combien de temps ?

5. Qui perd la course ? Au bout de combien de temps arrivera-t-il ?

Encadrement d'un nombre réel et arrondis

Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Il existe un unique entier relatif a tel que $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$. Cet encadrement est l'**encadrement décimal** de x à 10^{-n} près. L'**arrondi** de x à 10^{-n} près est celui des deux nombres décimaux $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Application directe

Situation 1

A l'aide d'une calculatrice, donner l'encadrement décimal à 10^{-3} près des nombres réels suivants :

$a = \sqrt{7}$ $\quad b = \pi - 4 \quad c = \frac{3 \times 5^2}{107} \quad d = 2\sqrt{3} - 7$

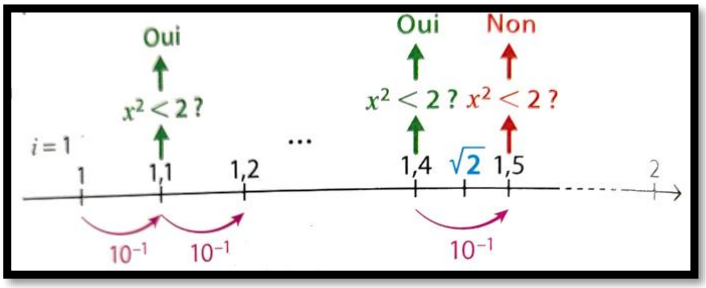
$e = 2\pi - 3 \quad f = \frac{3^2 \times 5}{17} \quad g = \cos(80°) \quad h = \frac{3\sqrt{7} - 9}{2}$

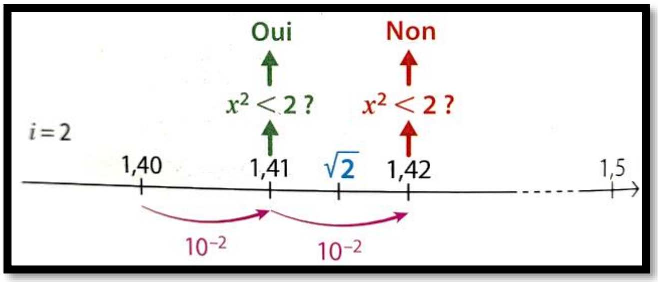
Proposer ensuite un arrondi à 10^{-3} près de chacun des nombres réels que vous avez encadrés.

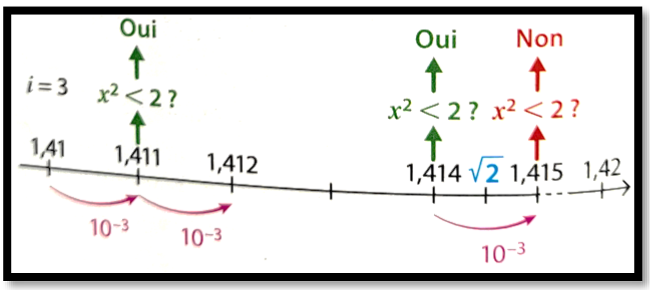
Situation 2

On rappelle que la racine carrée de 2 est un nombre irrationnel défini ainsi : « la racine carrée de 2 est le nombre positif dont le carré est égal à 2 ». On souhaite obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-n} pour un entier naturel n donné. Pour cela on va utiliser une méthode dite de « balayage » dont le principe est le suivant. On sait que la racine carrée de 2 est comprise entre 1 et 2. On va balayer les nombres décimaux de la forme $1 + k \times 10^{-n}$ où k est un entier naturel de l'intervalle $[1;2]$ jusqu'à trouver le premier dont le carré est supérieur à 2.

Sauriez-vous proposer en langage libre un algorithme utilisant la boucle « tant que » permettant de proposer un encadrement de la racine de 2 d'amplitude choisie. Traduire l'algorithme en langage Python, le faire tourner et conclure.







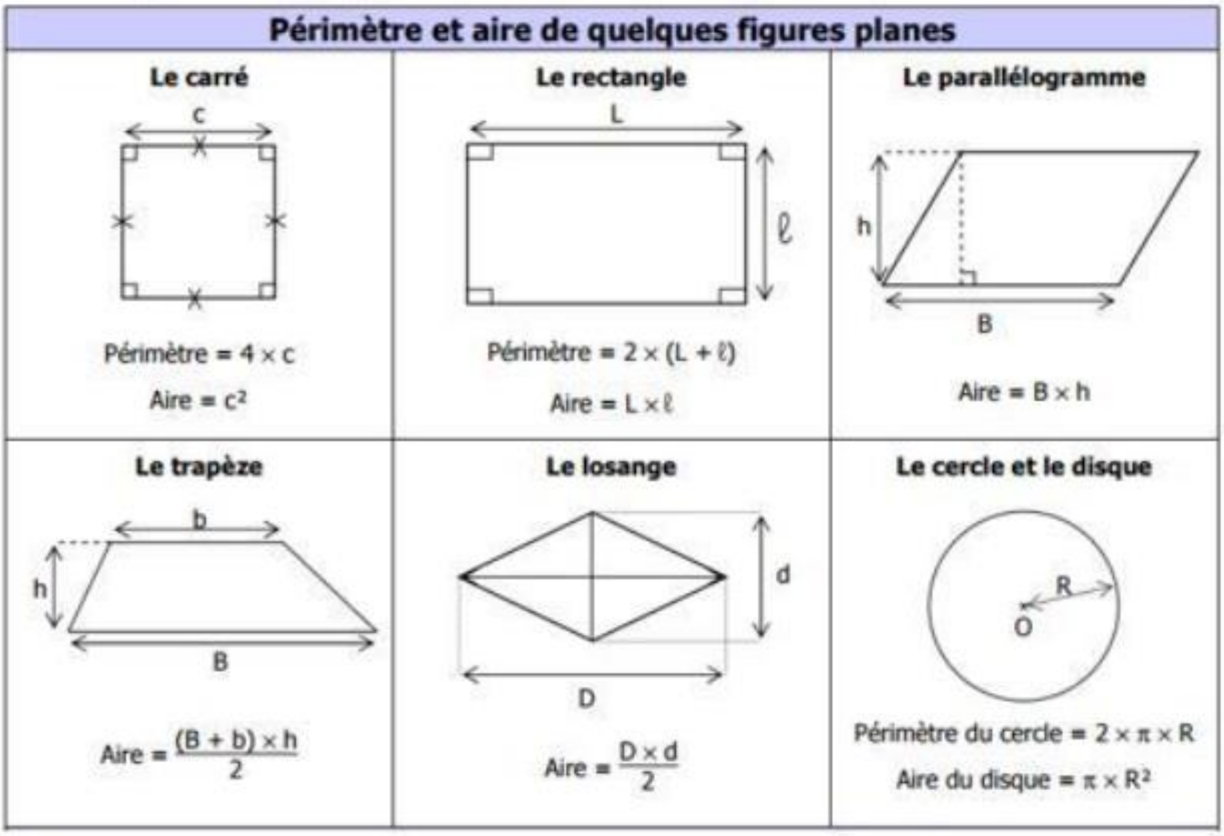
Manipulation des encadrements

Un rectangle a une longueur comprise entre 4 et 5 mètres et une largeur comprise entre 2 et 3 mètres. Sauriez-vous encadrer son périmètre ? Justifier votre réponse.

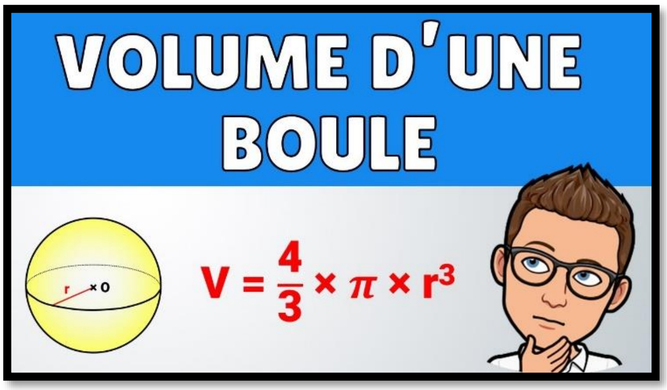
Un trapèze a une petite base comprise entre 3,6 et 3,7 cm, une grande base comprise entre 5,3 et 5,4 cm et une hauteur de 2 cm. Sauriez-vous encadrer son aire ? Justifier votre réponse.

L'encadrement décimal du nombre irrationnel π à 10^{-2} près est $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Sauriez-vous encadrer l'aire d'un disque de rayon 10 cm ? Justifier votre réponse.

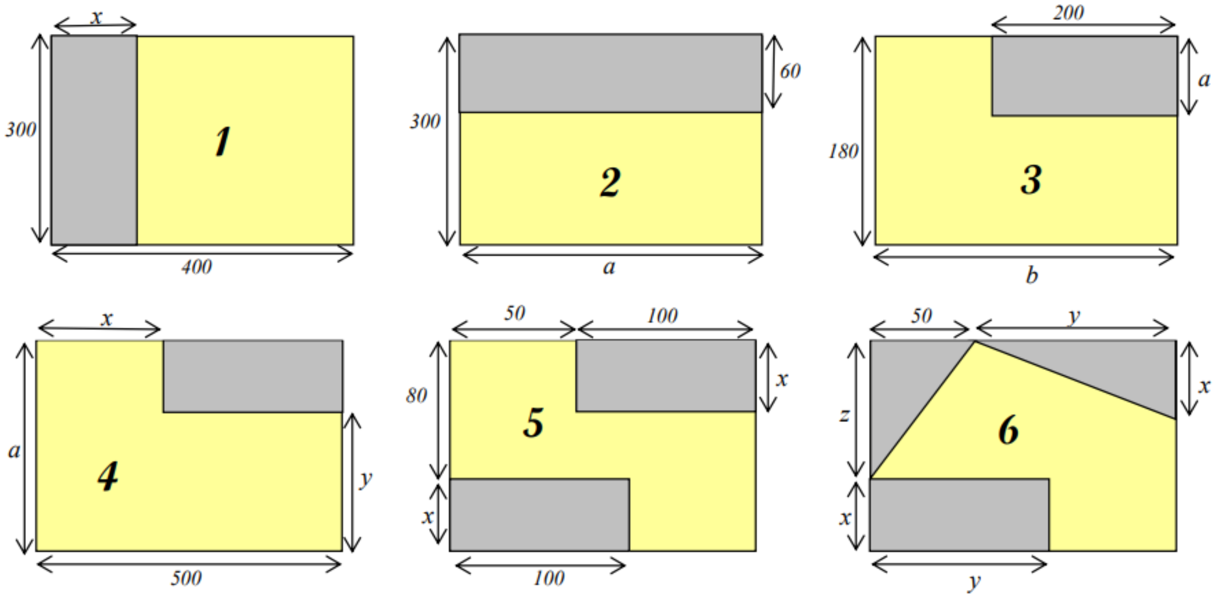
Dans la question suivante on prendra pour arrondi à 10^{-2} près du nombre π la valeur décimale $\pi \approx 3{,}14$. Le rayon de moyen de la terre est compris entre 6352 et 6384 km. Sauriez-vous encadrer la circonférence de la terre ? Justifier votre réponse.



L'encadrement décimal du nombre π à 10^{-3} près est $3{,}141 < \pi < 3{,}142$. Sauriez-vous encadrer le volume d'une boule de rayon 10 cm ? Justifier. Dans la question suivante on prendra pour arrondi à 10^{-3} près du nombre π la valeur décimale $\pi \approx 3{,}142$. Le rayon de moyen de la terre est compris entre 6352 et 6384 km. Sauriez-vous encadrer le volume de la terre ? Justifier.



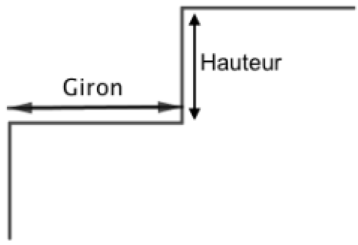
Résolution de deux problèmes



Voici le plan des 6 pièces d'un appartement. Les dimensions sont données en cm. Pour chaque pièce, la partie jaune doit être recouverte de moquette. L'expression « $180b - 200a$ » représente la surface de moquette nécessaire pour recouvrir une pièce. Laquelle ? Faire de même pour chacune des autres pièces en donnant une expression de la surface de moquette nécessaire en fonction des dimensions données. Développer si possible et réduire chacune des expressions.

Calculer la longueur x pour que la surface de moquette de la pièce 1 soit égale à 11,04 m2. Calculer la longueur a pour que la surface de moquette de la pièce 2 soit égale à 7,704 m2. Calculer la longueur x pour que la surface de moquette de la pièce 5 soit égale à 1,17 m2. Essayer de proposer a et b pour que la surface de moquette de la pièce 3 soit égale à 3,476 m2.

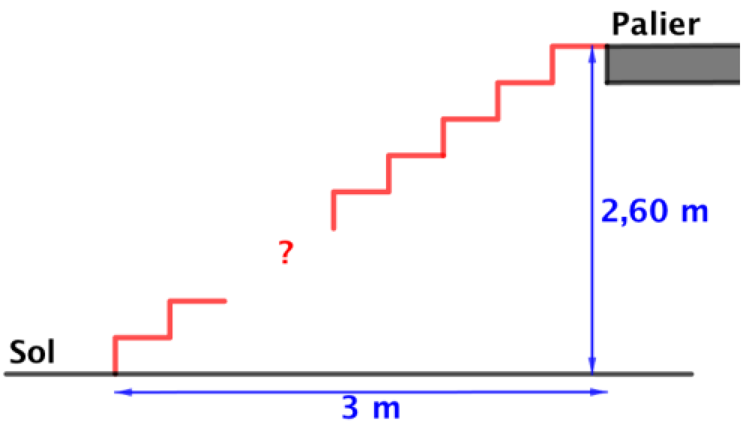
Pour construire un escalier, il faut respecter certaines normes :



- Hauteur de marche : entre 17 et 21 cm,
- Giron de marche : entre 21 et 27 cm,
- Largeur de l'escalier : supérieur à 70 cm,
- 2 hauteurs de marche + 1 giron : entre 60 et 64 cm.

Entre le sol et le palier, on dispose d'une longueur d'escalier de 3 mètres et d'une hauteur de 2,60 mètres.

En respectant les normes énoncées ci-dessus (issues de la Loi Blondel), combien de marches doit-on prévoir ? On précisera les dimensions des marches (hauteur et giron).



Exercice 1

On note n le nombre de minutes utilisées au-delà des 2 heures de communication prévues dans chaque formule.

Donner, en fonction de n, l'expression du prix payé avec chacune des trois formules.

	abonnement mensuel fixe pour 2 heures de communication	supplément par minute (commencée) au-delà des 2 heures
formule 1	30 €	0,25 €
formule 2	15 €	0,75 €
formule 3	20 €	0,5 €

1. Quand la formule 1 est-elle plus intéressante que la formule 2 ?
   Quand la formule 2 est-elle plus intéressante que la formule 3 ?
   Quand la formule 3 est-elle plus intéressante que la formule 1 ?

2. Comment conseiller chacune des trois formules au consommateur en fonction du nombre de minutes qu'il pense consommer au-delà des 2 heures prévues ?

Exercice 2

Résoudre chaque inéquation proposée ci-contre et représenter succinctement l'intervalle des solutions.

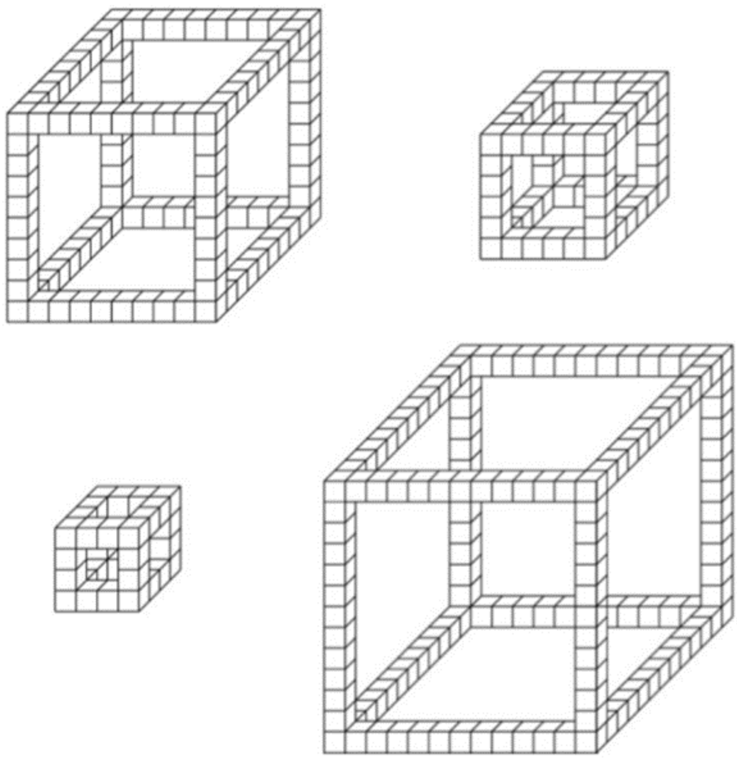
a) $2x-3 \geqslant -1$. b) $3x+5 < -x-3$.

c) $-x-1 \geqslant 3x+15$. d) $-2x+3 < -x+2$.

Exercice 3

On propose ci-contre ce que l'on appelle les « squelettes » de quatre « grands » cubes de dimensions respectives :

- $n=10$,
- $n=6$,
- $n=4$,
- $n=13$.



On appelle N, le nombre de « petits » cubes nécessaires pour fabriquer le « squelette » d'un grand cube.

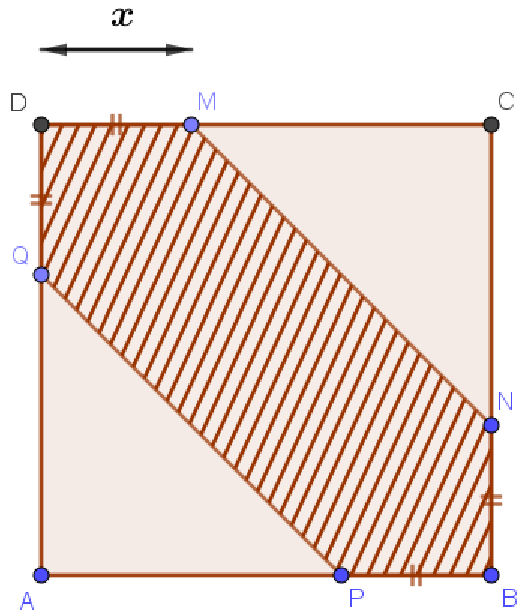
1. Préciser la valeur de N pour chacun des quatre grands cubes ?

2. Déterminer l'expression de N en fonction de n.
   Pour quelle dimension n a-t-on besoin de 226 petits cubes pour construire le squelette ?

Exercice 4

ABCD est un carré de coté 1. On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle la surface de la portion hachurée est égale aux trois quarts de la surface totale du carré.

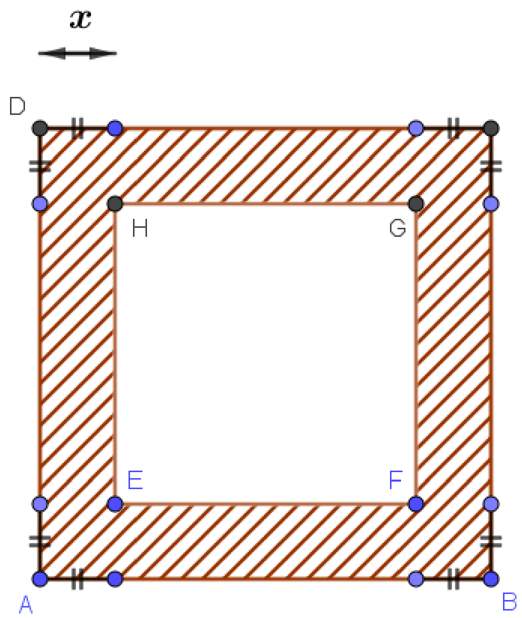
1. Quelle est l'aire du carré ABCD ?
2. Exprimer en fonction de x les aires des deux triangles CMN et APQ.
3. En déduire l'expression de la surface de la portion hachurée.
4. Modéliser le problème par une équation, ramener cette équation à une équation produit, la résoudre et répondre à la question posée.



Exercice 5

ABCD est un carré de coté 1. On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle la surface de la portion hachurée est égale aux trois quarts de la surface totale du carré.

1. Quelle est l'aire du carré ABCD ?
2. Exprimer en fonction de x l'aire du carré EFGH situé au centre de ABCD.
3. En déduire l'expression de la surface de la portion hachurée.
4. Modéliser le problème par une équation, ramener cette équation à une équation produit, la résoudre et répondre à la question posée.



Exercice 6

Programme 1

« Choisir un nombre à deux chiffres, soustraire à ce nombre la somme de ses chiffres, observer le résultat. »

Programme 2

« Penser à un nombre entier. Ajouter au double du suivant le double du précédent. Puis soustraire le triple du nombre pensé au départ ».

Pour chacun des deux programmes proposés ci-dessus, qu'observe-t-on ? Expliquer pourquoi…