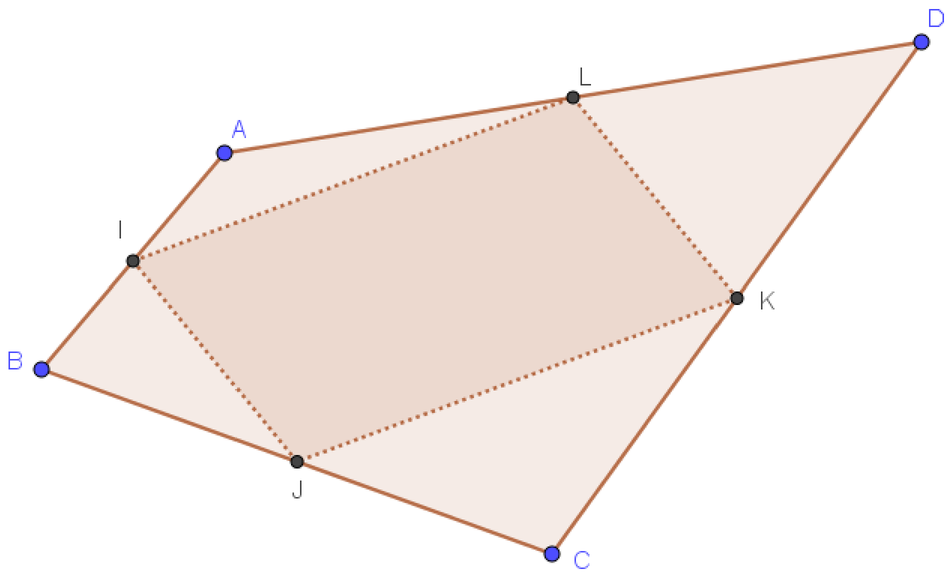
Quadrilatère quelconque et parallélogramme

On considère ABCD un quadrilatère quelconque.

On définit les points I, J, K et L par : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



Ainsi les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

Dans cet exercice, on souhaite démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Première version de la démonstration

Dans un premier temps on raisonnera dans un repère orthonormé avec les points $A(2;-1)$, $B(3;2)$, $C(15;4)$, $D(8;-5)$. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et de $\overrightarrow{LK}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJKL ?

Deuxième version de la démonstration

Dans un second temps on raisonnera avec les points quelconques $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $D(x_D;y_D)$. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L en fonction des coordonnées des points A, B, C et D. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ puis conclure.

Troisième version de la démonstration

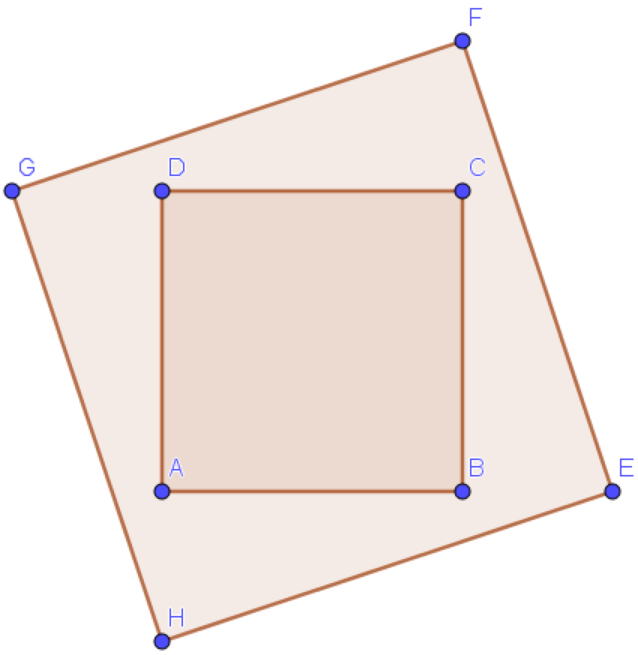
Enfin on raisonnera sans repère. En remarquant que $\overrightarrow{IJ}$ peut s'écrire $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. En remarquant que $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}$, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$. En déduire une expression de $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. Conclure.

Un carré et un autre carré

ABCD est un carré de coté 1. On considère les points E, F, G et H sont définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \Big| \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \Big| \quad \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \Big| \quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$. En déduire, dans ce repère, les coordonnées des points E, F, G et H ainsi que la nature du quadrilatère EFGH.



Soit k un nombre réel strictement positif. Reprendre l'exercice avec les points E, F, G et H définis par :

$$\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{DG} = k\overrightarrow{CD} \qquad \overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{DA}$$

Questions à choix multiples

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, déterminer l'unique bonne réponse parmi les trois proposées :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BS}$ sont	$(x_B - x_S\,;\, y_B - y_S)$	$(x_S - x_B\,;\, y_S - y_B)$	$(x_S + x_B\,;\, y_S + y_B)$
On donne B (– 1 ; 2) et S (3 ; – 5), alors $\overrightarrow{BS}$ a pour coordonnées	(2 ; – 3)	(4 ; – 7)	(– 4 ; 7)
Les coordonnées du milieu M du segment [CD] sont	$\begin{cases} x_M = x_D - x_C \\ y_M = y_D - y_C \end{cases}$	$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_C - x_D}{2} \\ y_M = \dfrac{y_C - y_D}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2} \\ y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2} \end{cases}$
On donne C (– 4 ; 5) et D (6 ; – 9), alors le milieu M de [CD] a pour coordonnées	(5 ; – 7)	(1 ; – 2)	(– 5 ; 7)
Dans un repère orthonormé, on donne A $(a\,;\,b)$ et Q $(e\,;\,d)$, alors AQ =	$\sqrt{(e-a)^2 + (d-b)^2}$	$\sqrt{(e+a)^2 + (d+b)^2}$	$\sqrt{(e+a)^2 - (d+b)^2}$
Dans un repère orthonormé, on donne A (– 2 ; 3) et Q (– 1 ; 5), alors AQ =	$\sqrt{13}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{5}$