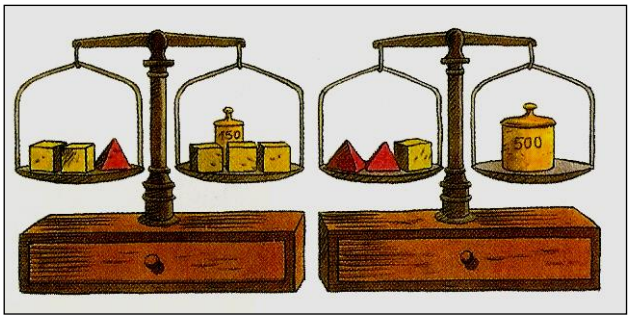
Situation 1



Les deux balances proposées ci-dessus sont en équilibre. Déterminer la masse d'une pyramide et celle d'un cube (bien entendu, toutes les pyramides ont la même masse et tous les cubes ont la même masse). Dans la balance de gauche, 150 grammes ont été ajoutés sur le plateau de droite. Dans la balance de droite, 600 grammes ont été déposés sur le plateau de droite.

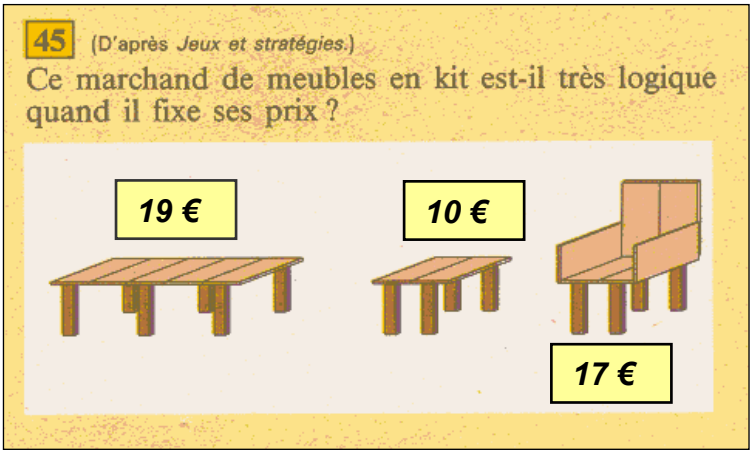
Situation 2

On considère le système de deux équations à deux inconnues :

$$(S)\begin{cases}5x+6y=19\\2x+4y=10\end{cases}$$

Résoudre le système.

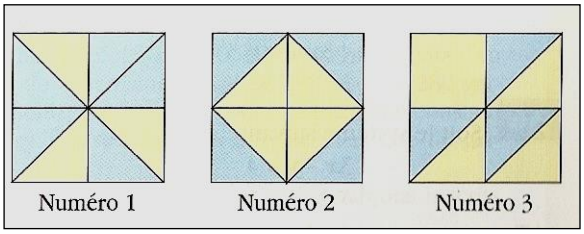
A l'aide du résultat précédent répondre à la question posée ci-contre. Justifier votre réponse.



Situation 3

Résoudre le système :

$$(S)\begin{cases}5x+3y=20,5\\4x+4y=22\end{cases}$$



On fabrique des badges à l'aide de triangles, tous de la même forme, dont certains sont en émail gris et d'autres en émail blanc. Les triangles de même couleur sont au même prix. Sachant que le badge n°1 revient à 20,5€ et que le badge n°2 revient à 22 €, déterminer le coût du badge n°3.

Situation 4

Au cours d'une randonnée, vous apercevez une ferme d'animaux exotiques, où sont élevés des autruches et des buffles. Vous vous arrêtez et demandez à l'éleveur le nombre de chaque espèce. L'éleveur répond : « C'est simple, si vous comptez le nombre de têtes vous trouvez 126, tandis que si vous comptez le nombre de pattes, vous trouvez 330 ». Quel est le nombre d'autruches et le nombre de buffles que possède cet éleveur ?

Résolution algébrique par substitution

$(S_1)\begin{cases}3x+y=6\\y-x=4\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}2x-y=1\\-x+2y=4\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}2x+4y=56\\3x+2y=40\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}5x+6y=40\\2x+4y=10\end{cases}$

Résolution algébrique par combinaison

$(S_1)\begin{cases}3x+y=6\\y-x=4\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}2x-y=1\\-x+2y=4\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}2x+4y=56\\3x+2y=40\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}5x+6y=40\\2x+4y=10\end{cases}$

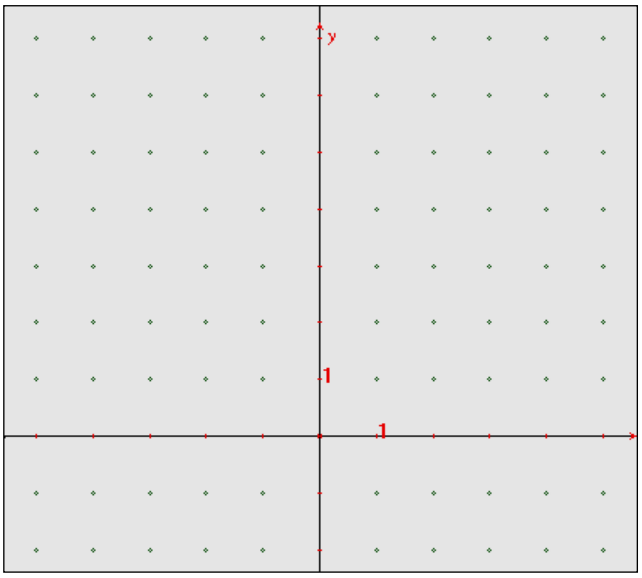
Résolution graphique

Système 1

On souhaite résoudre graphiquement le système de deux équations à deux inconnues (S_1).

- On considère la droite (d1) d'équation : $y=-3x+6$
- On considère la droite (d2) d'équation : $y=x+4$

1. Tracer avec précision ces deux droites.
2. Ces droites sont-elles sécantes ?

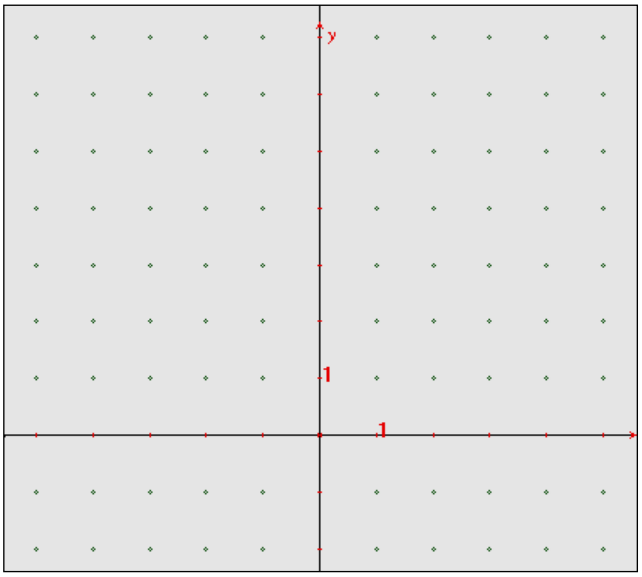


Système 2

On souhaite résoudre graphiquement le système de deux équations à deux inconnues (S_2).

- On considère la droite (d1) d'équation : $y=2x-1$
- On considère la droite (d2) d'équation : $y=0,5x+2$

3. Tracer avec précision ces deux droites.
4. Ces droites sont-elles sécantes ?



5. Que remarque-t-on sur les coordonnées des points d'intersection de chaque couple de droites tracées ci-dessus ? En déduire le procédé de résolution graphique d'un système.

Choix de la méthode de résolution

Résoudre par la méthode algébrique la plus judicieuse chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x-3y=-20 \\ -8x-3y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=-20 \\ -3x+5y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x-5y=-1 \\ -3x+10y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y=-1 \\ -x-5y=-13 \end{cases}$$

Quelques problèmes

1. Un fleuriste propose : « un bouquet composé de cinq jonquilles et de sept roses pour un prix de 24 euros » ou bien « un bouquet composé de huit jonquilles et de six roses pour un prix de 25,40 euros ». Calculer le prix d'une jonquille et celui d'une rose.

2. Dans un restaurant un couple commande une pizza et deux jus de fruits et paye 11 euros. A la table voisine, des amis commandent cinq pizzas et neuf jus de fruit et payent 53 euros. Calculer le prix d'une pizza et celui d'un jus de fruit.

3. Un troupeau de chameaux et de dromadaires vient se désaltérer. On compte 12 têtes et 17 bosses. Combien ce troupeau compte-t-il de chameaux ? de dromadaires ?

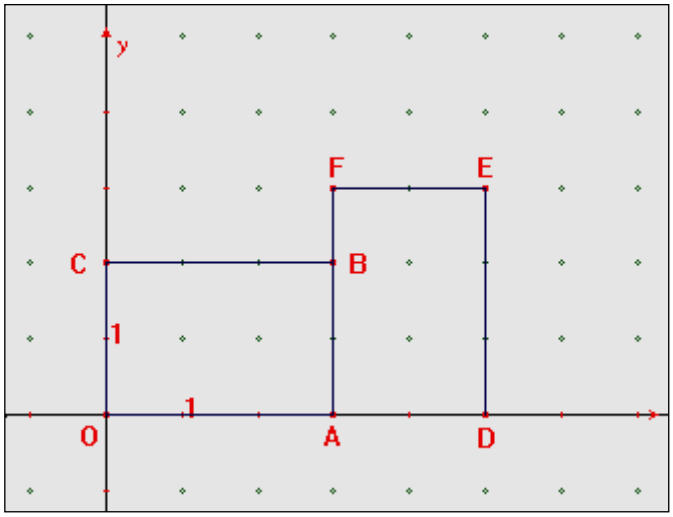
Retour sur la méthode graphique

On considère le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} x+y=5 \\ 5y-x=10 \end{cases}}$$

1. Résoudre graphiquement le système en détaillant votre raisonnement. On pourra s'aider de la figure ci-contre.

2. Vérifier le résultat par le calcul.



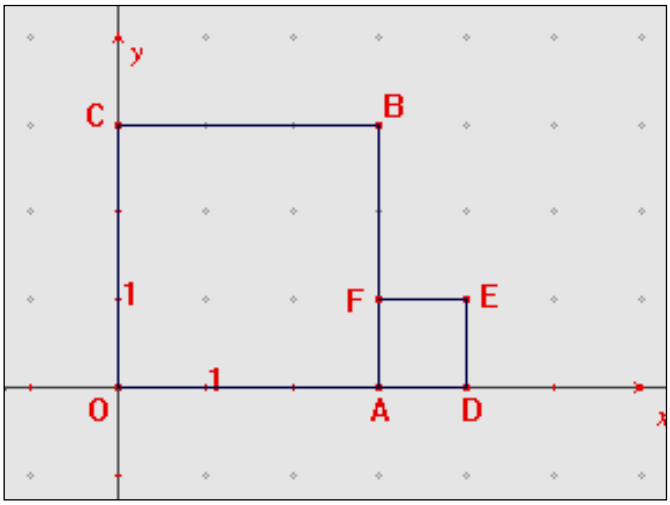
On considère le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+y=12 \end{cases}}$$

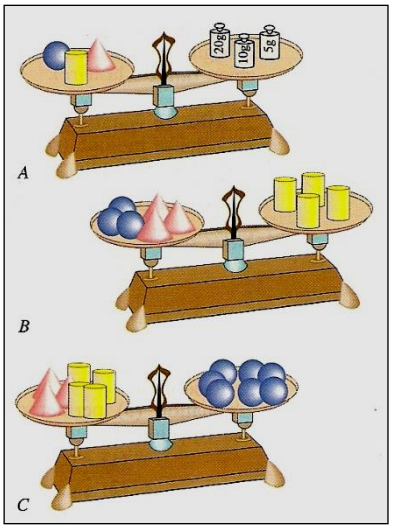
3. Résoudre graphiquement le système en détaillant votre raisonnement. On pourra s'aider de la figure ci-contre.

4. Vérifier le résultat par le calcul.

5. Quelles sont les limites de ce type de résolution d'un système ?



Système de 3 équations à 3 inconnues

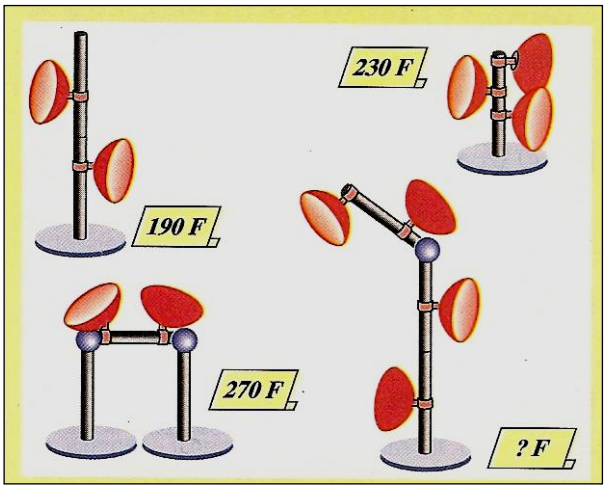


Les trois balances représentées ci-contre sont équilibrées. Le but du problème est de déterminer la masse de chaque objet.

- On appellera x la masse d'une sphère.
- On appellera y la masse d'un cône.
- On appellera z la masse d'un cylindre.

1. Ecrire un système d'équations.
2. Résoudre le système par substitution.
3. Répondre au problème posé.

Première application

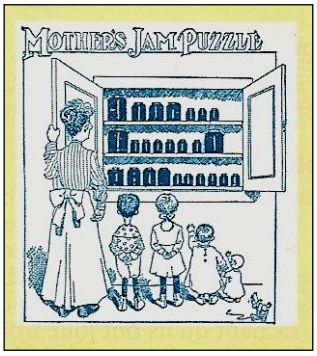


Quel est le prix du quatrième luminaire, sachant que seuls les lampes, les supports de lampes et les socles interviennent dans le prix ? Les montants sont des francs suisses…

Indication :

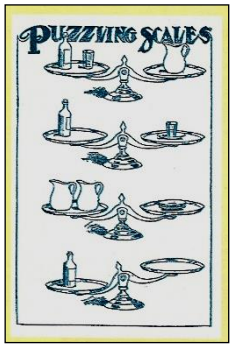
On se ramènera à la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

Deuxième application



Madame Hubbard a inventé un système très intelligent pour compter ses pots de confitures. Elle a disposé les pots dans un placard de telle sorte qu'elle ait 6 kilogrammes de confiture sur chaque planche. Il y a trois tailles de pots. Pouvez-vous déterminer combien chaque pot contient de confiture ?

Et avec quatre inconnues ?



Le problème ci-contre comporte une inconnue supplémentaire, c'est-à-dire quatre.

- La masse d'une bouteille,
- La masse d'un verre,
- La masse d'une carafe,
- La masse d'une sous-tasse.

Combien de verres équilibrent la bouteille ?

Colinéarité des vecteurs et notion de déterminant

Définitions

On rappelle que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$.

On appelle **déterminant de deux vecteurs** $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ le nombre $ad - bc$. On le note de la façon suivante $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ et on a la formule suivante $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si le **déterminant de ces deux vecteurs est nul** c'est-à-dire si et seulement si $ad - bc = 0$.

Démonstration de la propriété

Implication directe :

Etant donné deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ supposés colinéaires, calculer leur déterminant.

Implication réciproque :

Etant donné quatre nombres a, b, c et d tels que $ad - bc = 0$ et en posant $k = \frac{c}{a}$ déduire l'égalité $\vec{v} = k \times \vec{u}$ et conclure.

Application directe

Situation 1

Calculer les déterminants des vecteurs proposés ci-contre. Indiquer s'ils sont colinéaires. Lorsqu'ils le sont préciser le coefficient de colinéarité.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{s}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{s}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Situation 2

On considère les points et les vecteurs proposés ci-contre. Calculer les coordonnées des vecteurs puis les déterminants des couples de vecteurs proposés. Sont-ils colinéaires ?

D(–3 ; –1), E(–4 ; 2), F(2 ; –2) et G(1 ; 1).

a) $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{DE}$ **b)** $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$

c) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ **d)** $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DG}$

Situation 3

Dans chaque cas proposé ci-contre déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a) A(–2 ; 1), B(3 ; 4), C(2 ; 2) et D(5 ; 4)
b) A(2 ; 2), B(5 ; 4), C(1 ; 4) et D(–2 ; 2)
c) A(3 ; 4), B(5 ; 0), C(0 ; 5) et D(3 ; 0)

Situation 4

Dans chaque cas proposé ci-contre, dire si les trois points considérés sont alignés. Justifier.

a) A(–4 ; 3), B(2 ; 3) et C(6 ; 3)
b) D(2 ; 5), E(–4 ; –3) et F(5 ; 9)
c) G(–2 ; 1), H(3 ; 4) et I(5 ; 5)

Situation 5

Dans chaque cas proposé ci-contre, dire si le point C appartient à la droite (AB). Justifier.

a) A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7)
b) A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8)
c) A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4)

Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur non nul possédant la même direction que la droite. Pour une droite donnée, il existe **une infinité** de vecteurs directeurs.

Définition

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où les coefficients a et b ne sont pas nuls simultanément. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Propriété

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Démonstration de la propriété

Soit $A(x_A;y_A)$ et $M(x;y)$ deux points du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Nous cherchons à déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Calculer le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur $\vec{u}$.
3. Que peut-on dire de ces deux vecteurs lorsque $M\in(d)$?
4. En déduire la forme générale de l'équation cartésienne de la droite (d).

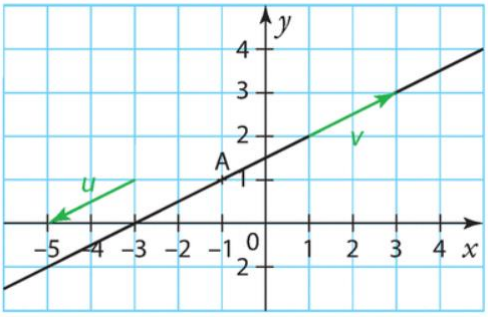
Application directe

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) passant par le point $B(5;3)$ et le point $C(1;-3)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_3) passant par le point $D(-2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_4) passant par le point $E(1;1)$ et le point $F(6;4)$. Détailler votre raisonnement.

Autres exercices d'application directe

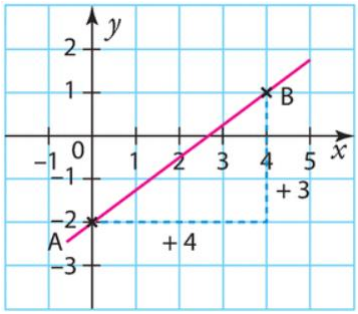
Situation 1

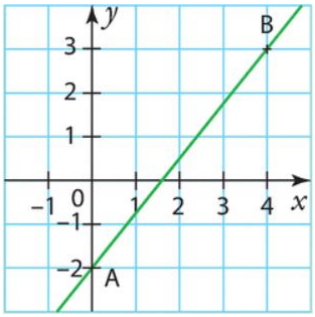
A l'aide des renseignements pris sur le graphique proposé ci-contre, déterminer un vecteur directeur de la droite, un point spécifique de la droite et en déduire une équation cartésienne de la droite proposée.



Situation 2

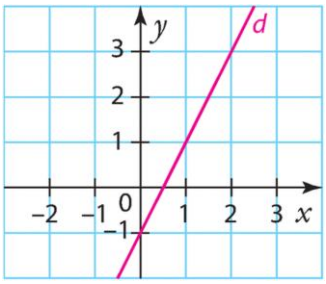
Déterminer dans chaque situation, un vecteur directeur, un point spécifique et une équation cartésienne de la droite proposée.

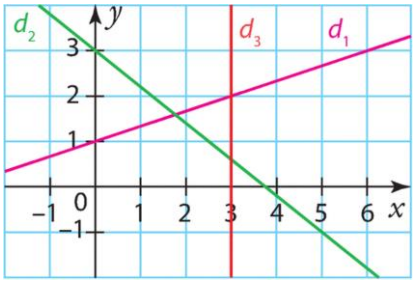




Situation 3

Déterminer dans chaque situation, un vecteur directeur, un point spécifique et une équation cartésienne de la droite proposée.





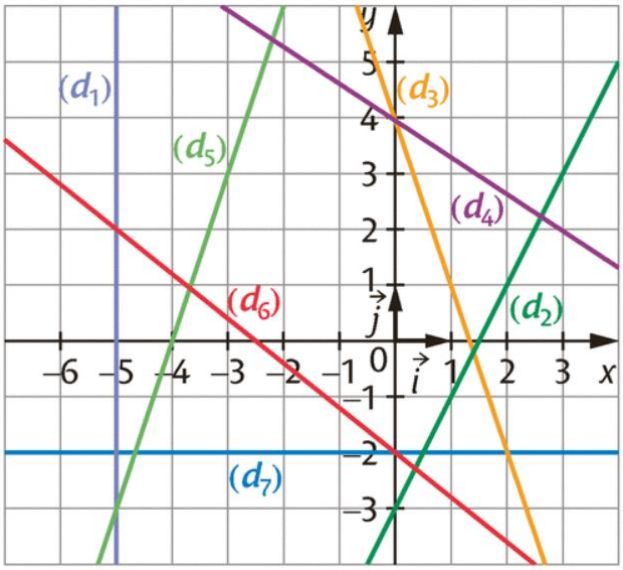
Situation4

On considère ci-contre sept droites tracées dans un repère.

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune des sept droites.

2. En déduire la forme générale d'une équation cartésienne pour chacune des sept droites.

3. En utilisant un point spécifique de chaque droite, compléter la détermination de l'équation cartésienne de chaque droite.



Equation réduite d'une droite

Rappelons que toute droite non verticale du plan admet une **équation réduite** de la forme $y = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** de la droite et où p est l'**ordonnée à l'origine**.

Démontrer ce résultat puis, retrouver les équations réduites de toutes les droites de cette page.

Pente et ordonnée à l'origine

On considère la droite d'**équation réduite** $y = mx + p$.

Propriétés

Le vecteur de coordonnée $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite. m est appelée la pente.

Le **point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées** a pour coordonnées $(0; p)$.

Démonstration des deux propriétés

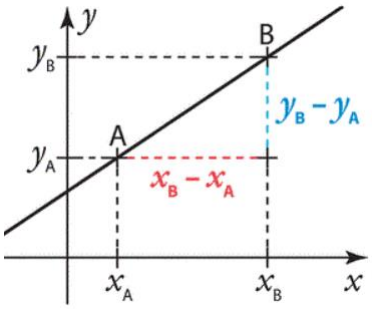
1. Déterminer une équation cartésienne de cette droite et en déduire un vecteur directeur.
2. A l'aide de l'un des deux types d'équation déterminer l'ordonnée du point d'abscisse nulle.

Conséquences

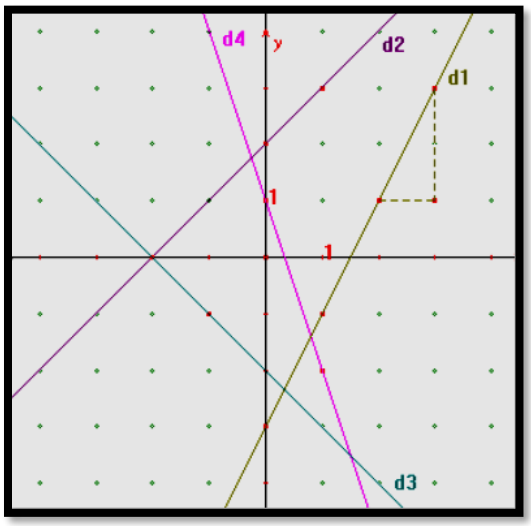
Si $m > 0$ alors la droite « monte », on dit qu'elle est croissante. Si $m < 0$ alors la droite « descend », on dit qu'elle est décroissante. Si $m = 0$ alors la droite est « horizontale », parallèle à l'axe des abscisses. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

Pour mémoire, le coefficient directeur m (ou la pente) d'une droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'un repère est donnée par la formule suivante $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

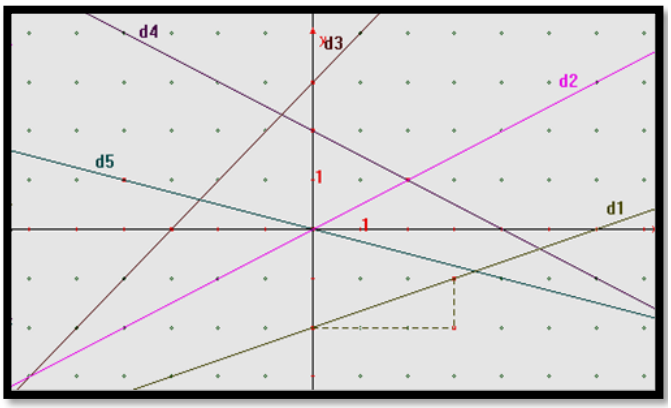
On dit que la pente est le quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal pour aller d'un point à un autre.



Application directe



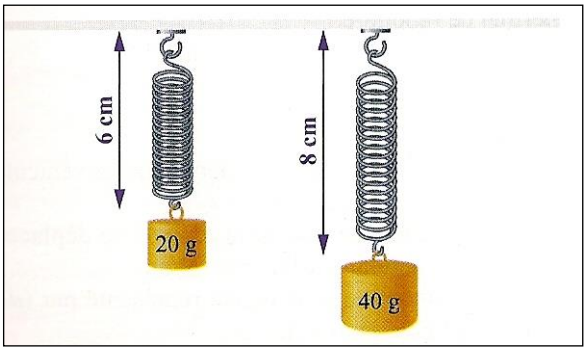
Déterminer les équations réduites (puis les équations cartésiennes) des neuf droites proposées.



On considère une droite non verticale d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et d'équation réduite $y = mx + p$. Exprimer m et p en fonction de a, b et c.

Vers la notion de fonction affine

On suspend un objet à un ressort, puis on mesure la longueur de ce ressort. On note x la masse en grammes de cet objet et $f(x)$ la longueur du ressort en centimètres.



1. A l'aide du dessin ci-contre, recopier et compléter le tableau suivant :

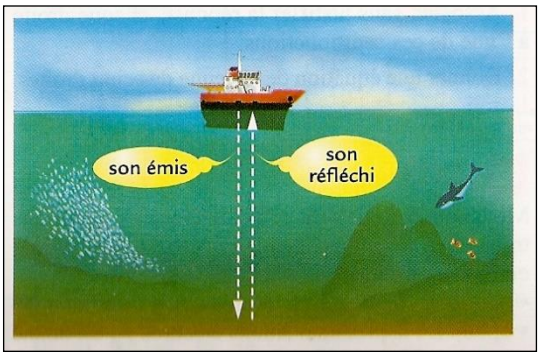
x	20	
$f(x)$		8

2. Les physiciens proposent la formule suivante : $f(x) = 0{,}1 \times x + 4$.
   - Quelle est la nature de la fonction f ?
   - Déterminer l'image de 20 par la fonction f.
   - Déterminer l'image de 40 par la fonction f.

3. Quelle est la longueur de ce ressort à vide.
   De combien s'allonge ce ressort à chaque gramme supplémentaire ?

En passant par la notion de fonction linéaire

Un des problèmes que rencontrent les navigateurs est de savoir quelle hauteur d'eau est sous leur bateau. Autrefois on utilisait un câble lesté mais aujourd'hui, c'est un appareil appelé « sondeur » qui sert à évaluer cette hauteur. Le principe est d'envoyer un son verticalement puis d'enregistrer son écho lorsqu'il revient au bateau. Les unités utilisées pour la suite de l'exercice sont, le mètre pour les longueurs et la seconde pour les durées.



On note t la durée séparant l'émission et la réception du son et $g(t)$ la hauteur d'eau sous le bateau. Les navigateurs utilisent la formule suivante : $g(t) = 750 \times t$.

1. A l'aide de la formule ci-dessus, recopier et compléter le tableau suivant :

t	0	1	2	3	4
$g(t)$					

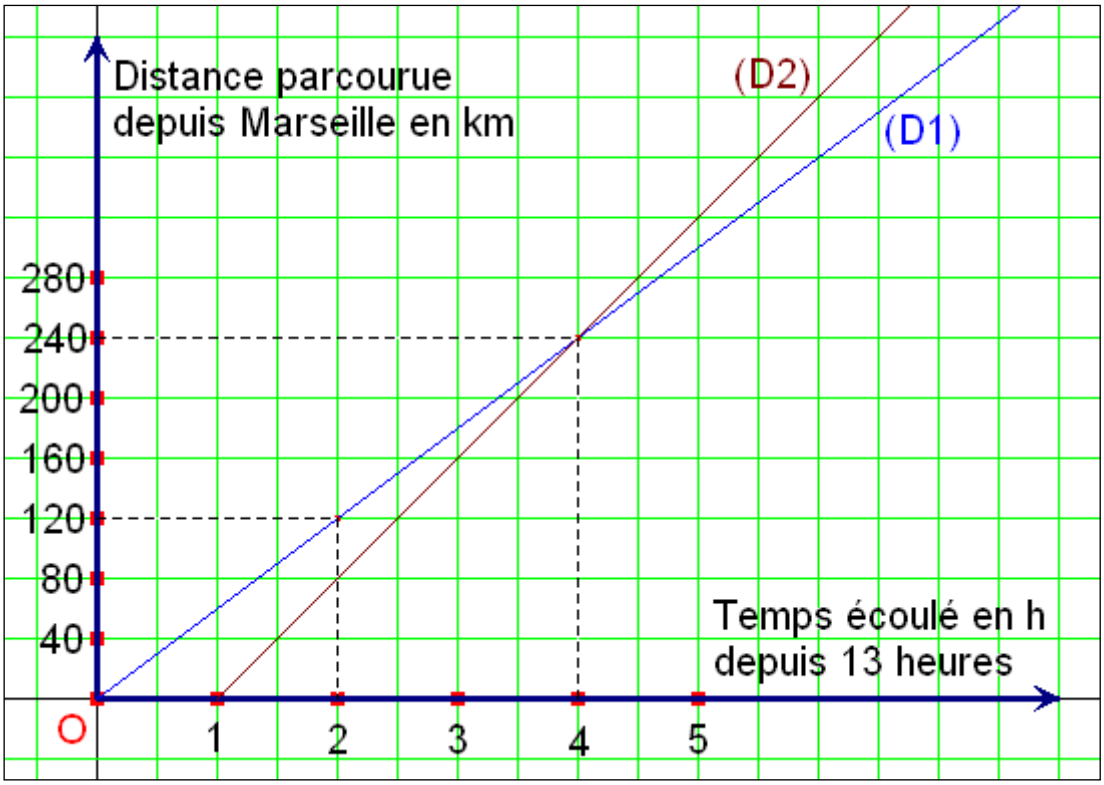
2. Quelle est la nature de la fonction g ? Que peut-on dire du tableau ?

3. Déterminer la profondeur sous le bateau si le son émis revient instantanément ?
   De combien augmente la profondeur sous le bateau à chaque seconde supplémentaire ?

4. Sauriez-vous déterminer la vitesse du son dans l'eau ?

Fonction linéaire, fonction affine et fonction constante

Deux automobilistes A et B se déplacent sur la route nationale Marseille-Lyon. Le déplacement de l'automobiliste A est représenté par la droite (D1) tandis que le déplacement de l'automobiliste B est représenté par la droite (D2).



1. Déterminer graphiquement l'heure de départ de l'automobiliste A et celle de B.

2. Déterminer graphiquement l'heure à laquelle l'automobiliste B dépasse A.

3. Déterminer la vitesse de chacun des deux automobilistes.

4. Un motocycliste C part de Marseille sur cette même route à midi. Il se déplace à la vitesse de 40 km/h. Dans le repère, tracer la droite (D3) représentant le déplacement du motocycliste.

5. Déterminer graphiquement l'heure à laquelle chacun des deux automobilistes A et B double le motocycliste C.

6. Sachant que la ville d'arrivée se situe à 360 km de Marseille, déterminer graphiquement l'heure d'arrivée de chacun des trois voyageurs.

On propose ci-dessous trois fonctions. Associer à chacune des trois droites tracées dans le repère la fonction qui lui correspond et retrouver chaque résultat (quand est-ce que B dépasse A, quand est-ce que A dépasse C, quand est-ce que B dépasse C, quand est-ce que A, B puis C arrivent) à l'aide d'un calcul de type résolution de système que vous expliciterez.

$f(x) = 80x - 80$ $\qquad$ $g(x) = 60x$ $\qquad$ $h(x) = 40x + 40$

Deux exercices classiques pour s'entrainer

Situation 1

Deux entreprises de location de matériel louent une machine aux tarifs suivants :

- Tarif A = 300 € par jour de location.
- Tarif B = un forfait de 1000 € puis 200 € par jour de location.

1. On appelle $f(x)$ le prix payé pour x jours de location avec le tarif A.
   Déterminer l'expression de $f(x)$. Quelle est la nature de la fonction f ?

2. On appelle $g(x)$ le prix payé pour x jours de location avec le tarif B.
   Déterminer l'expression de $g(x)$. Quelle est la nature de la fonction g ?

3. Représenter les droites qui représentent les fonctions f et g. Pour quel nombre de jours les deux tarifs seront-ils identiques ? (réponse donnée par lecture graphique et par calcul).

Situation 2

Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures :

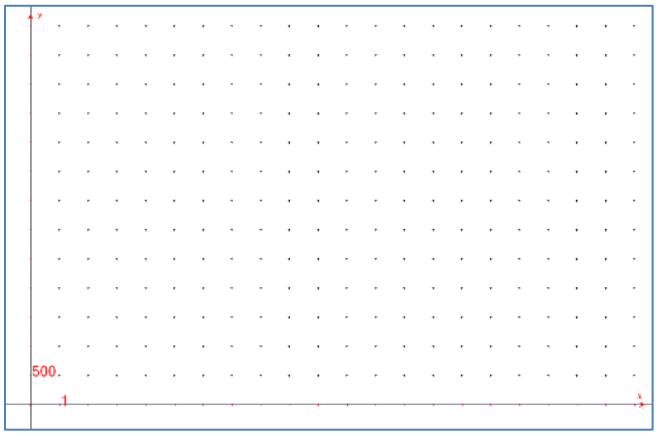
- Tarif A = un forfait de 400 € puis 2 € par kilomètre parcouru.
- Tarif B = un forfait de 200 € puis 4 € par kilomètre parcouru.

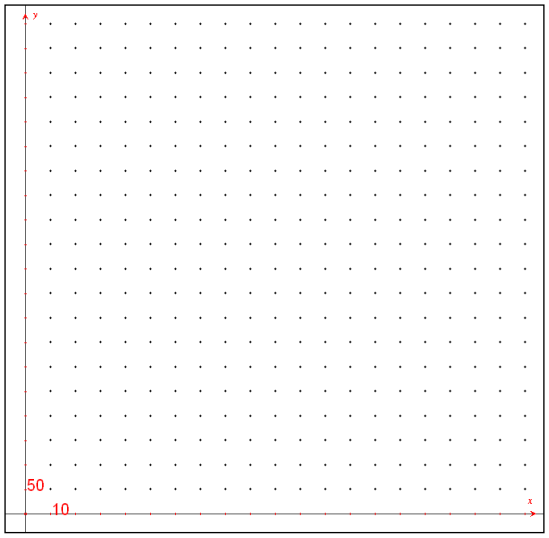
1. On appelle $f(x)$ le prix payé pour x kilomètres parcourus avec le tarif A.
   Déterminer l'expression de $f(x)$. Quelle est la nature de la fonction f ?

2. On appelle $g(x)$ le prix payé pour x kilomètres parcourus avec le tarif B.
   Déterminer l'expression de $g(x)$. Quelle est la nature de la fonction g ?

3. Représenter les droites qui représentent les fonctions f et g. Pour quel kilométrage les deux tarifs seront-ils identiques ? (réponse donnée par lecture graphique et par calcul).

Représentations graphiques





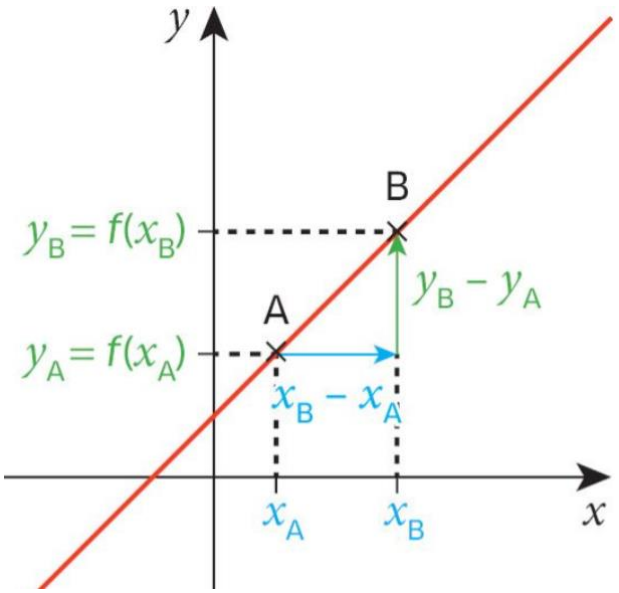
Propriété des accroissements constants

Une **fonction affine** est une fonction définie par l'expression $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels. La **représentation graphique** d'une fonction affine est une droite d'équation réduite $y = mx + p$ où m et p sont respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine.

Si $m > 0$ alors la fonction est **croissante**. Si $m < 0$ alors la fonction est **décroissante**. Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

Lorsque $p = 0$ on dit que la fonction est **linéaire**. La représentation graphique est alors une droite passant par l'origine.

La propriété des accroissements indique que quels que soient x_A et x_B deux nombres réels, si f est une fonction affine alors la quantité $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ est constante et égale à m, coefficient directeur de la droite.

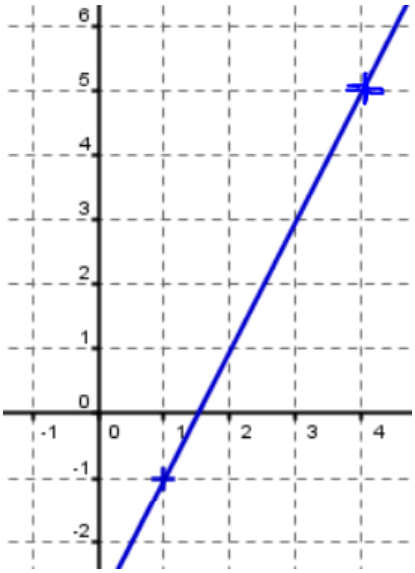


Démonstration

Démontrer, dans le cadre d'une fonction affine, la propriété des accroissements constants.

Savoir déterminer l'expression d'une fonction affine

On considère la fonction affine f telle que $f(1) = -1$ et $f(4) = 5$. On se propose de déterminer de deux manières l'expression de la fonction f, c'est-à-dire, la valeur de m et la valeur de p telles que $f(x) = mx + p$.



A l'aide d'un système

Ecrire un système de deux équations à deux inconnues, vérifié par m et p, le résoudre puis, donner l'expression de f.

A l'aide de la propriété des accroissements constants

Déterminer la valeur de m par la formule des accroissements constants, en déduire la valeur de p puis, l'expression de f.

Deux exercices d'application directe

- Déterminer l'expression de la fonction affine g telle que $g(2) = 1$ et $g(5) = -5$.
- Déterminer l'expression de la fonction affine h telle que $h(-3) = 5$ et $h(3) = 1$.

Approximation affine pour effectuer des prévisions

Un commerçant a ouvert en janvier une boutique au centre-ville. Il a relevé sur les dix premiers mois de l'année le nombre de clients ayant effectué un achat dans sa boutique et a obtenu le tableau suivant :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre
Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de clients	900	850	750	800	950	900	950	850	1050	1000

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i;y_i)$ où x_i représente le rang du mois et y_i le nombre de clients dans le repère orthogonal fourni ci-dessous en respectant les unités proposées sur chacun des deux axes.

2. On appelle G_1 et G_2 les points moyens des deux sous-nuages constitués d'une part par les cinq premiers points du nuage, d'autre part par les cinq derniers points du nuage et dont les coordonnées sont obtenues en effectuant la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées.

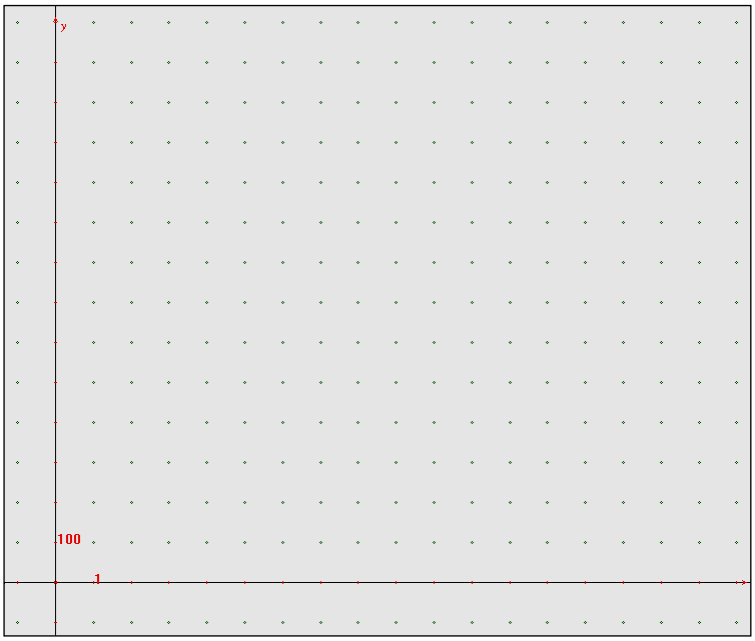
    1. Calculer les coordonnées des points G_1 et G_2.
    2. Placer les points G_1 et G_2 dans le repère et tracer la droite (G_1G_2).
    3. Déterminer par le calcul une équation de cette droite.

3. Déduire des questions précédentes l'expression de la fonction f qui réalisera une bonne <u>approximation affine</u> du nombre de clients fréquentant chaque mois la boutique.

4. En faisant apparaître tous les tracés utiles, déterminer graphiquement une estimation du nombre de clients en janvier.

5. En faisant apparaître tous les tracés utiles, déterminer graphiquement à partir de quel mois le nombre de clients sera supérieur à 1100.

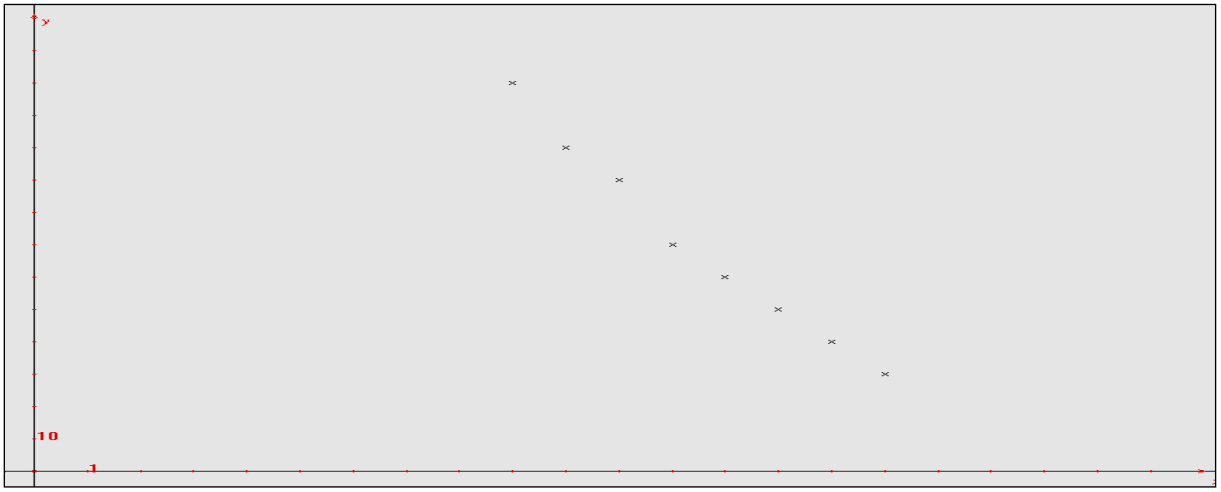
6. Retrouver les deux résultats précédents par un calcul faisant intervenir la fonction f.



Un exercice d'application directe

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Prix de vente en euros	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre d'acheteurs éventuels	120	100	90	70	60	50	40	30



1. Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des quatre premiers points du nuage puis les coordonnées du point moyen G_2 des quatre derniers points. Placer ces points sur le graphique. Tracer (G_1G_2) et déterminer l'équation de cette droite.

2. Déduire des questions précédentes l'expression de la fonction f qui réalisera une bonne approximation affine du nombre d'acheteurs éventuels. Calculer le nombre d'acheteurs que l'on peut prévoir si le prix est fixé à 8 euros. Déterminer le prix de vente pour qu'il y ait 20 acheteurs potentiels.

Un autre exercice d'application directe

Chaque année le taux de natalité est calculé en divisant le nombre de naissances par le nombre d'habitants du pays. Lors d'une étude statistique menée en 2023 par l'INSEE, on a constaté en France, que le taux de natalité était en baisse. Voici le tableau des résultats constatés. Il n'est pas demandé dans cet exercice de trace le nuage des points.

Année	2014	2016	2018	2020	2022
Rang x_i	4	6	8	10	12
Taux de natalité y_i	1,38	1,40	1,37	1,34	1,31

Calculer l'équation de la droite de Mayer (G_1G_2) où G_1 est le point moyen des deux premiers points du nuage et G_2 est le point moyen des trois derniers points du nuage. En déduire l'expression de la fonction f qui réalisera une bonne approximation affine du taux de natalité. Déterminer le taux de natalité que l'on peut prévoir en l'an 2030. Déterminer à partir de quelle année on prévoit un taux de natalité inférieur à 1,29.

Point méthode sur la notion d'approximation affine et la notion d'estimation

La série statistique $\{(x_i; y_i)\}$ est donnée sous la forme d'un tableau à deux variables x et y. L'objectif est de chercher une relation affine, c'est-à-dire de la forme $y = ax + b$, entre les deux variables. Pour cela on adopte le raisonnement suivant :

- On séparer le nuage des points de coordonnées $(x_i; y_i)$ en deux sous nuages,
- On calcule les coordonnées des points moyens appelés G_1 et G_2 de chaque sous nuage,
- On trace la droite (G_1G_2) qui constitue une « approximation affine » du nuage,
- On détermine l'équation réduite de cette droite sous la forme $y = ax + b$,
- On peut utiliser cette relation affine pour réaliser une « estimation » d'une des variables en dehors des valeurs connues du tableau.

Un exercice supplémentaire d'application directe

La fréquentation touristique d'une station balnéaire est donnée de 2014 (rang 1) à 2021 (rang 8) dans le tableau suivant et est représentée par un nuage de points dans le repère ci-dessous :

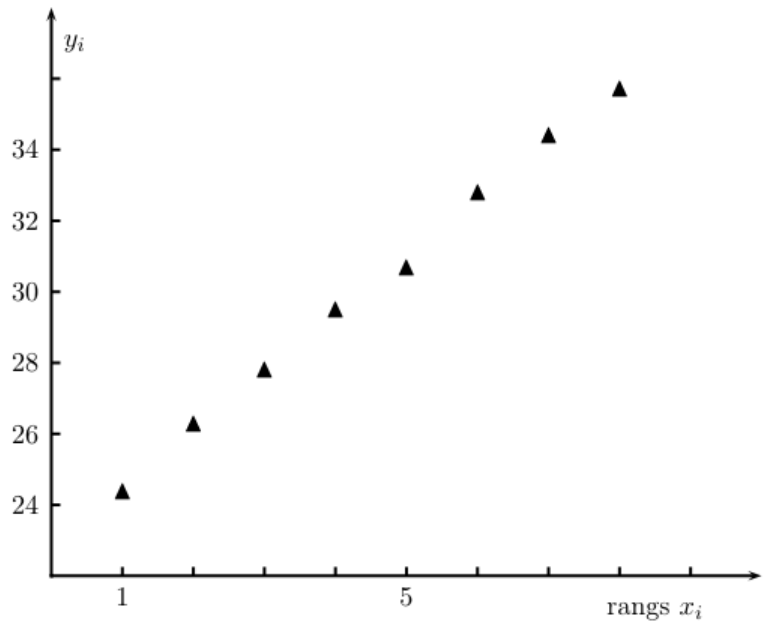
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de touristes y_i en milliers	24,4	26,3	27,8	29,5	30,7	32,8	34,4	35,7

1. Calculer les coordonnées des points moyens G1 et G2 des deux sous-nuages.

2. Placer ces points dans le repère et tracer la droite d'ajustement du nuage (G1G2).

3. Déterminer une équation réduite de cette droite sous la forme $y = ax + b$.

4. Déterminer le nombre de touristes que l'on peut prévoir en 2024. A partir de quelle année la fréquentation touristique dépassera 45000 touristes ?



Un dernier exercice pour manipuler une plus grande quantité de valeurs

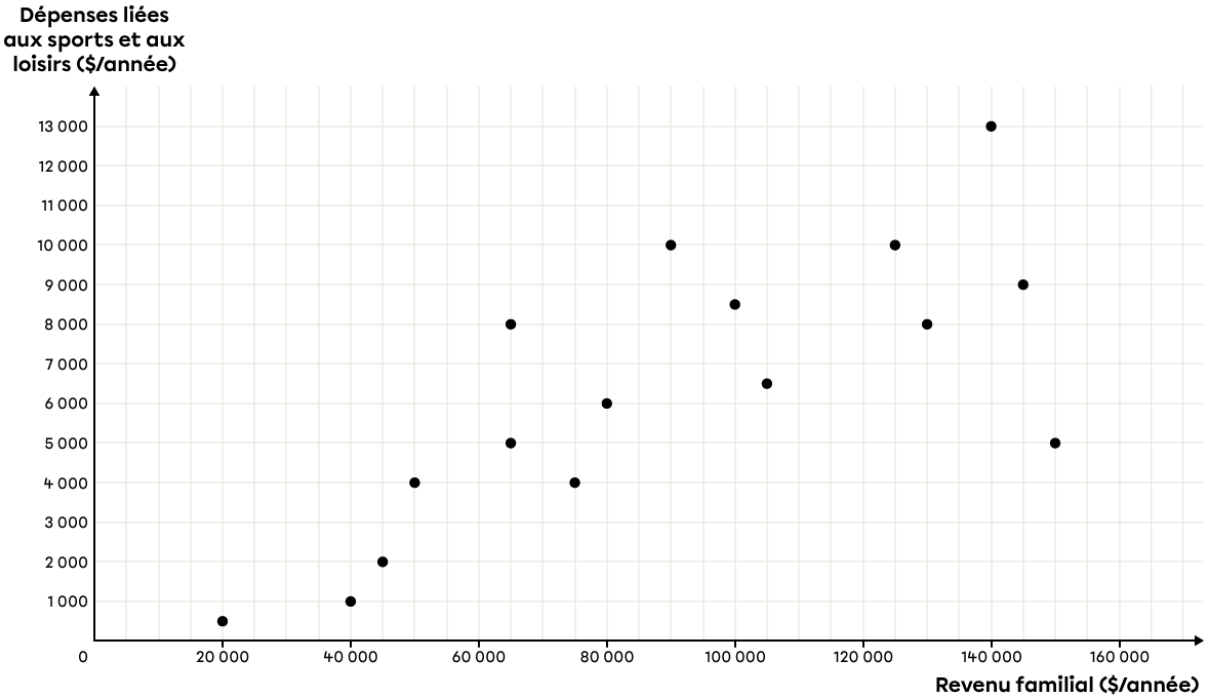
À la suite d'une enquête réalisée auprès de 16 familles québécoises, on s'est intéressé aux dépenses totales liées aux sports et aux loisirs en fonction de leur revenu familial.

Le tableau de valeurs ci-dessous présente les données recueillies. Ces données ont ensuite été placées dans un repère pour former un nuage de points.

Les dépenses liées aux sports et aux loisirs en fonction du revenu familial

Revenu familial ($/année)	125 000	65 000	35 000	145 000	130 000	80 000	50 000	40 000
Dépenses liées aux sports et aux loisirs ($/année)	10 000	8 000	1 000	9 000	8 000	6 000	4 000	2 000
Revenu familial ($/année)	90 000	20 000	75 000	105 000	100 000	140 000	150 000	65 000
Dépenses liées aux sports et aux loisirs ($/année)	10 000	500	4 000	6 000	8 000	13 000	5 000	5 000

Les dépenses liées aux sports et aux loisirs en fonction du revenu familial



1. Déterminer une bonne approximation affine du nuage de points. Détailler la démarche.

2. Une famille a un revenu familial annuel de 250000$. Si cette famille suit la même tendance que les autres familles québécoises interrogées, à quel montant son budget consacré aux sports et aux loisirs s'élève-t-il ? Justifier la réponse par un calcul.

3. Une famille dépense en moyenne 7500$ par année pour les sports et les loisirs. À combien son revenu familial annuel s'élève-t-il si elle suit les habitudes d'une famille québécoise typique ? Justifier la réponse par la résolution d'une équation.

Fonctions linéaires, affines et constantes

Situation 1

Le lièvre et la tortue disputent une course. La tortue parcourt 0,5 mètre en une seconde. Elle part avec 40 mètres d'avance sur le lièvre. Le lièvre lui parcourt 2,5 mètres en une seconde. La piste mesure 100 mètres. On appelle x le nombre de secondes écoulées. Exprimer $f(x)$ la distance qui sépare la tortue du départ de la piste. Quelle est la nature de cette fonction ? Exprimer $g(x)$ la distance qui sépare le lièvre du départ de la piste. Quelle est la nature de cette fonction ?

On travaillera dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm pour dix secondes écoulées en abscisses et 1 cm pour 10 mètres parcourus en ordonnées. Tracer la représentation graphique de la fonction $f(x)=0,5x+40$. Tracer la représentation graphique de la fonction $g(x)=2,5x$. Tracer la représentation graphique de la fonction $h(x)=100$. Quelle est la nature de cette fonction et à quoi correspond cette fonction dans le cadre de cette situation ?

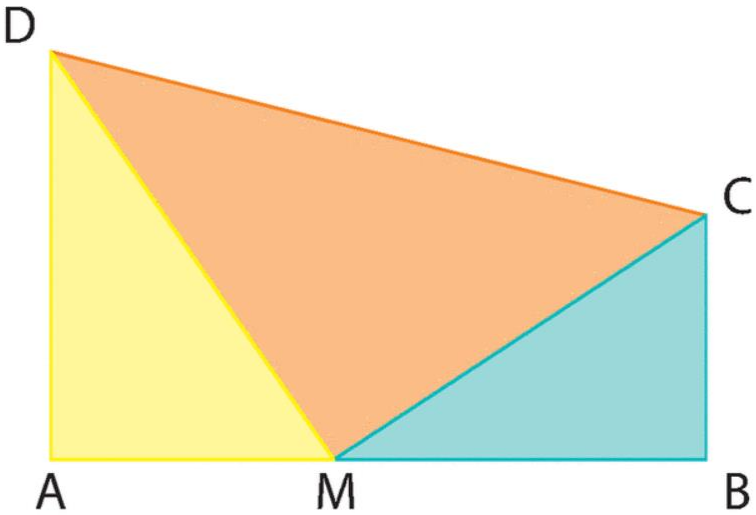
1. Déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la tortue. Comment expliquez-vous graphiquement ce résultat ?

2. Déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la ligne d'arrivée. Comment expliquez-vous graphiquement ce résultat ?

3. Déterminer au bout de combien de temps la tortue aura dépassé la ligne d'arrivée. Le résultat sera converti en minutes. Comment expliquez-vous graphiquement ce résultat ?

Situation 2

ABCD est un trapèze avec AB=8, AD=5 et BC=3. Pour tout point M du segment [AB] on note x la distance AM.



1. Déterminer les aires des triangles AMD et BMC en fonction de x.

2. Déterminer l'aire du trapèze ABCD puis en déduire l'aire du triangle CMD en fonction de x.

3. On appelle f, g et h les fonctions qui à x associent respectivement l'aire du triangles AMD, l'aire du triangle BMC et l'aire du triangle CND. Construire les courbes représentatives de ces trois fonctions dans un même repère.

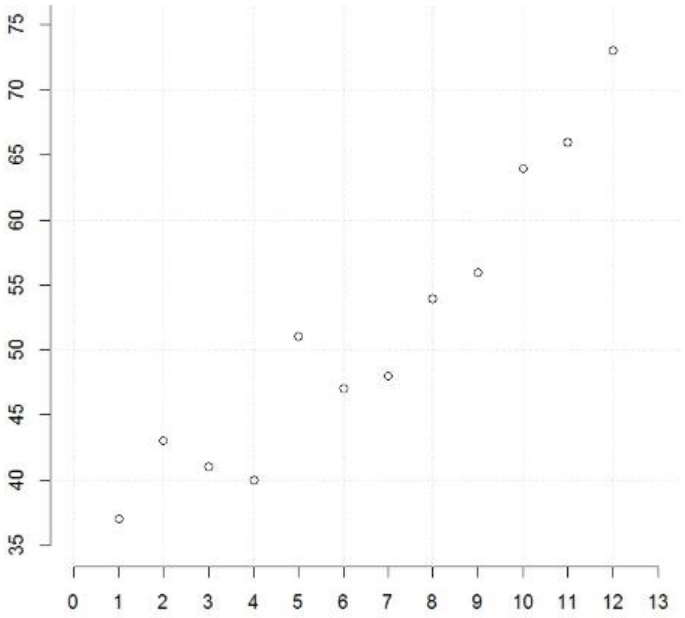
4. Graphiquement, peut-on trouver un point M tel que AMD et CMD aient la même aire ? Peut-on trouver un point M tel que AMD et BMC aient la même aire ? Peut-on trouver un point M tel que BMC et CMD aient la même aire ? Retrouver ensuite par le calcul les trois résultats précédents.

Deux exercices supplémentaires sur les approximations affines

Situation 1

On étudie l'évolution du nombre d'inscriptions à un jeu en ligne au cours du temps. Pour chaque mois de l'année 2023, on dispose du rang du mois (variable X : janvier est le rang 1, février est le rang 2, etc) et du nombre d'inscriptions exprimé en milliers correspondant (variable Y). On reporte dans le tableau ci-contre les valeurs et dans le graphique le nuage des points correspondants.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	37	43	41	40	51	47	48	54	56	64	66	73



1. Calculer les coordonnées des points moyens G1 et G2 correspondant respectivement aux six premiers mois et aux six derniers mois de l'année (arrondir au dixième).

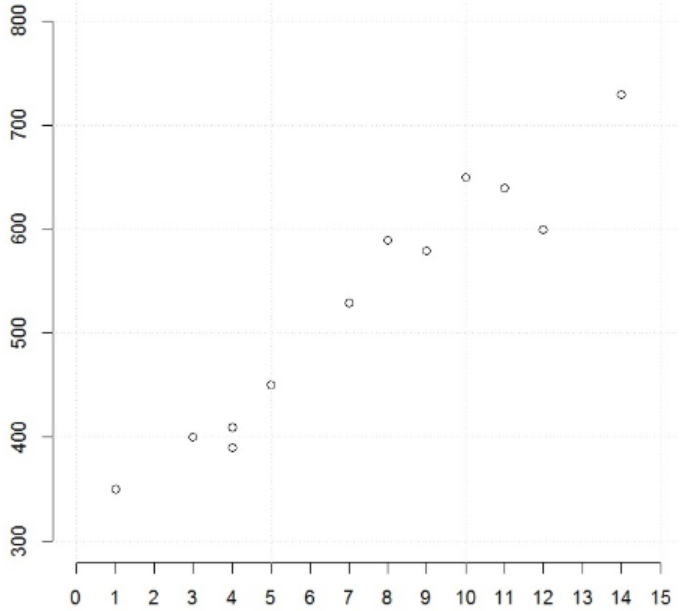
2. Déterminer en détaillant la méthode une approximation affine du nuage de points.

3. A partir de quand le nombre d'inscription sur cette plateforme dépassera 100000 ?

Situation 2

x_i	4	9	10	14	4	7	12	1	3	8	11	5
y_i	390	580	650	730	410	530	600	350	400	590	640	450

Une étude a été menée auprès de 12 étudiants afin d'expliquer le score à un examen de mathématiques à partir du temps consacré à la préparation de cet examen. Pour chaque étudiant, on dispose dans le tableau proposé ci-dessus du temps de révision en heures (variable X) et du score sur 800 points obtenu à l'examen (variable Y). Le graphique proposé ci-contre représente le nuage de points correspondants.



4. Déterminer en détaillant la méthode une approximation affine du nuage de points. On arrondira toujours au dixième.

5. A partir de combien d'heures de révisions peut-on espérer avoir le maximum des points ?