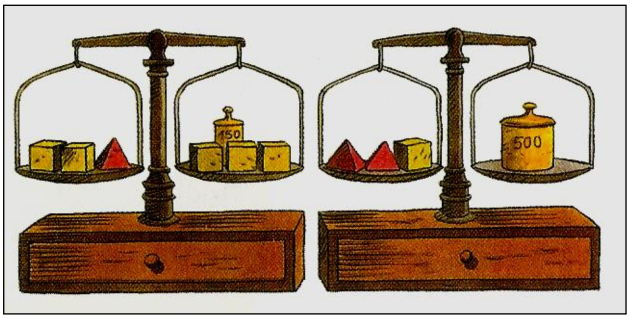
Situation 1



Les deux balances proposées ci-dessus sont en équilibre. Déterminer la masse d'une pyramide et celle d'un cube (bien entendu, toutes les pyramides ont la même masse et tous les cubes ont la même masse). Dans la balance de gauche, 150 grammes ont été ajoutés sur le plateau de droite. Dans la balance de droite, 600 grammes ont été déposés sur le plateau de droite.

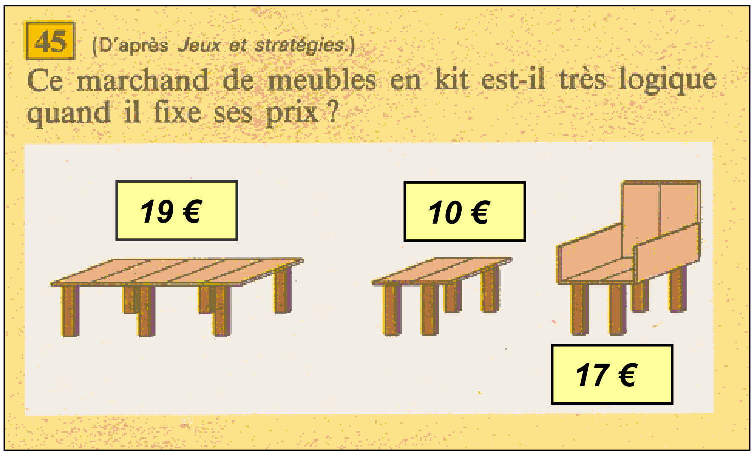
Situation 2

On considère le système de deux équations à deux inconnues :

$$(S)\begin{cases}5x+6y=19\\2x+4y=10\end{cases}$$

Résoudre le système.

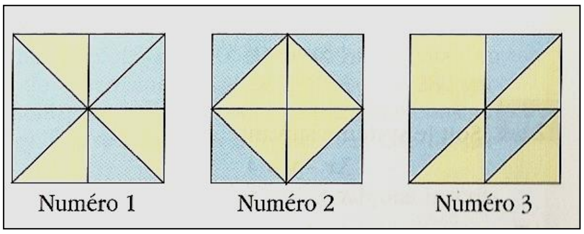
A l'aide du résultat précédent répondre à la question posée ci-contre. Justifier votre réponse.



Situation 3

Résoudre le système :

$$(S)\begin{cases}5x+3y=20,5\\4x+4y=22\end{cases}$$



On fabrique des badges à l'aide de triangles, tous de la même forme, dont certains sont en émail gris et d'autres en émail blanc. Les triangles de même couleur sont au même prix. Sachant que le badge n°1 revient à 20,5€ et que le badge n°2 revient à 22 €, déterminer le coût du badge n°3.

Situation 4

Au cours d'une randonnée, vous apercevez une ferme d'animaux exotiques, où sont élevés des autruches et des buffles. Vous vous arrêtez et demandez à l'éleveur le nombre de chaque espèce. L'éleveur répond : « C'est simple, si vous comptez le nombre de têtes vous trouvez 126, tandis que si vous comptez le nombre de pattes, vous trouvez 330 ». Quel est le nombre d'autruches et le nombre de buffles que possède cet éleveur ?

Résolution algébrique par substitution

$(S_1)\begin{cases}3x+y=6\\ y-x=4\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}2x-y=1\\ -x+2y=4\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}2x+4y=56\\ 3x+2y=40\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}5x+6y=40\\ 2x+4y=10\end{cases}$

Résolution algébrique par combinaison

$(S_1)\begin{cases}3x+y=6\\ y-x=4\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}2x-y=1\\ -x+2y=4\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}2x+4y=56\\ 3x+2y=40\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}5x+6y=40\\ 2x+4y=10\end{cases}$

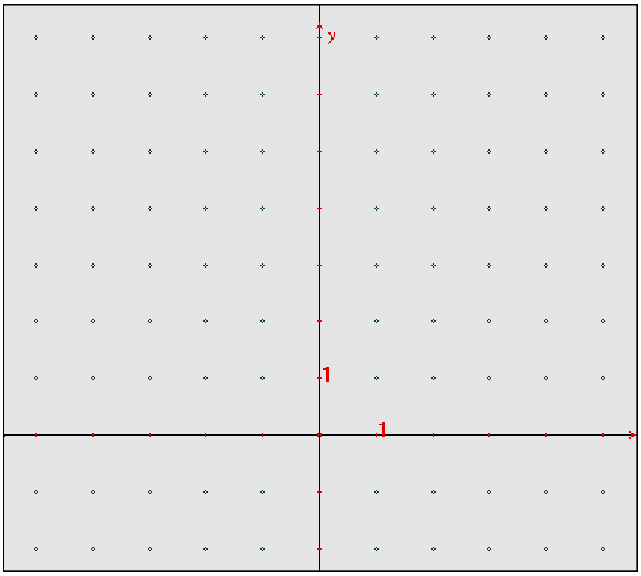
Résolution graphique

Système 1

On souhaite résoudre graphiquement le système de deux équations à deux inconnues (S_1).

- On considère la droite (d1) d'équation : $y=-3x+6$
- On considère la droite (d2) d'équation : $y=x+4$

1. Tracer avec précision ces deux droites.
2. Ces droites sont-elles sécantes ?

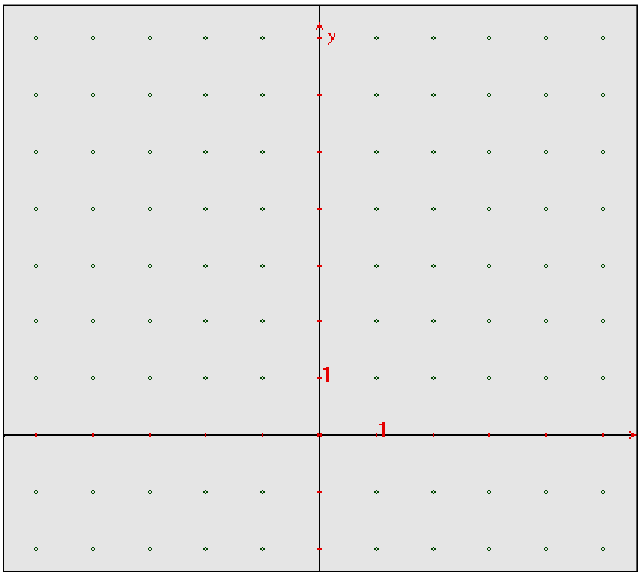


Système 2

On souhaite résoudre graphiquement le système de deux équations à deux inconnues (S_2).

- On considère la droite (d1) d'équation : $y=2x-1$
- On considère la droite (d2) d'équation : $y=0,5x+2$

3. Tracer avec précision ces deux droites.
4. Ces droites sont-elles sécantes ?



5. Que remarque-t-on sur les coordonnées des points d'intersection de chaque couple de droites tracées ci-dessus ? En déduire le procédé de résolution graphique d'un système.

Choix de la méthode de résolution

Résoudre par la méthode algébrique la plus judicieuse chacun des systèmes suivants :

$\begin{cases} 2x-3y=-20 \\ -8x-3y=12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x-y=-20 \\ -3x+5y=12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 6x-5y=-1 \\ -3x+10y=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x-y=-1 \\ -x-5y=-13 \end{cases}$

Quelques problèmes

1. Un fleuriste propose : « un bouquet composé de cinq jonquilles et de sept roses pour un prix de 24 euros » ou bien « un bouquet composé de huit jonquilles et de six roses pour un prix de 25,40 euros ». Calculer le prix d'une jonquille et celui d'une rose.

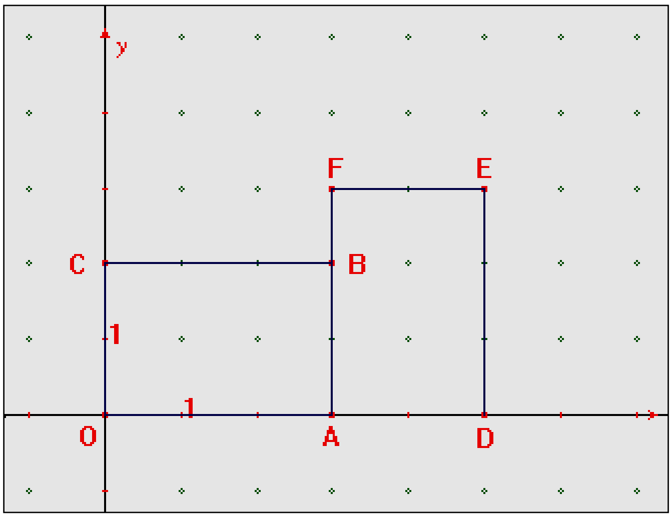
2. Dans un restaurant un couple commande une pizza et deux jus de fruits et paye 11 euros. A la table voisine, des amis commandent cinq pizzas et neuf jus de fruit et payent 53 euros. Calculer le prix d'une pizza et celui d'un jus de fruit.

3. Un troupeau de chameaux et de dromadaires vient se désaltérer. On compte 12 têtes et 17 bosses. Combien ce troupeau compte-t-il de chameaux ? de dromadaires ?

Retour sur la méthode graphique

On considère le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} x+y=5 \\ 5y-x=10 \end{cases}}$$

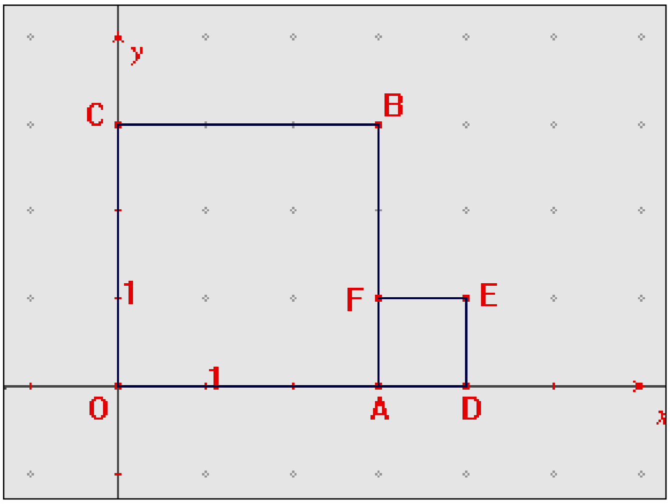


1. Résoudre graphiquement le système en détaillant votre raisonnement. On pourra s'aider de la figure ci-contre.

2. Vérifier le résultat par le calcul.

On considère le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+y=12 \end{cases}}$$

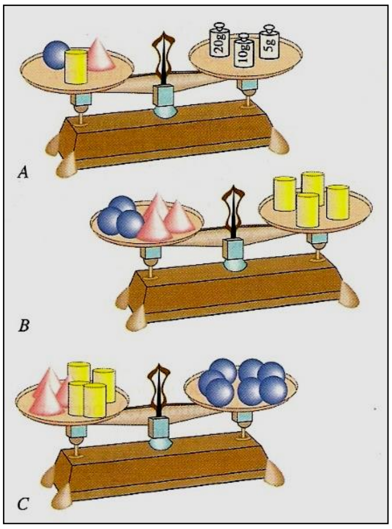


3. Résoudre graphiquement le système en détaillant votre raisonnement. On pourra s'aider de la figure ci-contre.

4. Vérifier le résultat par le calcul.

5. Quelles sont les limites de ce type de résolution d'un système ?

Système de 3 équations à 3 inconnues

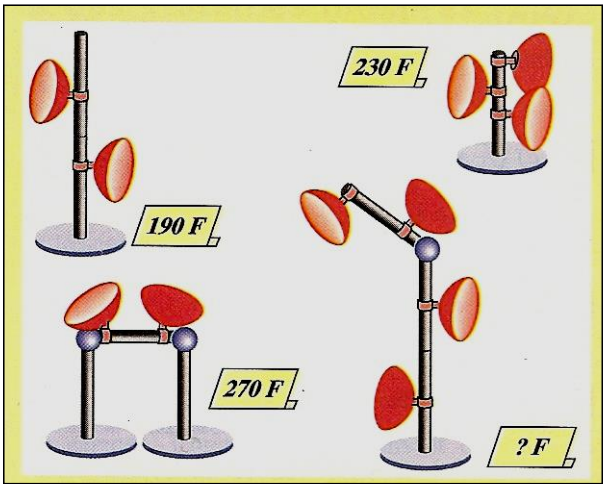


Les trois balances représentées ci-contre sont équilibrées. Le but du problème est de déterminer la masse de chaque objet.

- On appellera x la masse d'une sphère.
- On appellera y la masse d'un cône.
- On appellera z la masse d'un cylindre.

1. Ecrire un système d'équations.
2. Résoudre le système par substitution.
3. Répondre au problème posé.

Première application

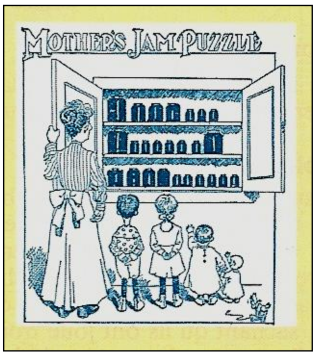


Quel est le prix du quatrième luminaire, sachant que seuls les lampes, les supports de lampes et les socles interviennent dans le prix ? Les montants sont des francs suisses…

Indication :

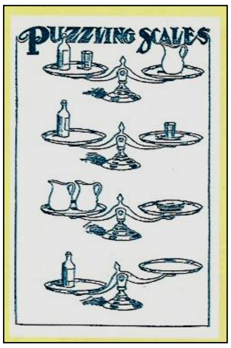
On se ramènera à la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

Deuxième application



Madame Hubbard a inventé un système très intelligent pour compter ses pots de confitures. Elle a disposé les pots dans un placard de telle sorte qu'elle ait 6 kilogrammes de confiture sur chaque planche. Il y a trois tailles de pots. Pouvez-vous déterminer combien chaque pot contient de confiture ?

Et avec quatre inconnues ?



Le problème ci-contre comporte une inconnue supplémentaire, c'est-à-dire quatre.

- La masse d'une bouteille,
- La masse d'un verre,
- La masse d'une carafe,
- La masse d'une sous-tasse.

Combien de verres équilibrent la bouteille ?

Colinéarité des vecteurs et notion de déterminant

Définitions

On rappelle que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$.

On appelle **déterminant de deux vecteurs** $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ le nombre $ad - bc$. On le note de la façon suivante $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ et on a la formule suivante $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si le **déterminant de ces deux vecteurs est nul** c'est-à-dire si et seulement si $ad - bc = 0$.

Démonstration de la propriété

Implication directe :

Etant donné deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ supposés colinéaires, calculer leur déterminant.

Implication réciproque :

Etant donné quatre nombres a, b, c et d tels que $ad - bc = 0$ et en posant $k = \frac{c}{a}$ déduire l'égalité $\vec{v} = k \times \vec{u}$ et conclure.

Application directe

Situation 1

Calculer les déterminants des vecteurs proposés ci-contre. Indiquer s'ils sont colinéaires. Lorsqu'ils le sont préciser le coefficient de colinéarité.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{s}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{s}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Situation 2

On considère les points et les vecteurs proposés ci-contre. Calculer les coordonnées des vecteurs puis les déterminants des couples de vecteurs proposés. Sont-ils colinéaires ?

D(−3 ; −1), E(−4 ; 2),
F(2 ; −2) et G(1 ; 1).

a) $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{DE}$ **b)** $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$

c) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ **d)** $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DG}$

Situation 3

Dans chaque cas proposé ci-contre déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a) A(−2 ; 1), B(3 ; 4), C(2 ; 2) et D(5 ; 4)
b) A(2 ; 2), B(5 ; 4), C(1 ; 4) et D(−2 ; 2)
c) A(3 ; 4), B(5 ; 0), C(0 ; 5) et D(3 ; 0)

Situation 4

Dans chaque cas proposé ci-contre, dire si les trois points considérés sont alignés. Justifier.

a) A(–4 ; 3), B(2 ; 3) et C(6 ; 3)
b) D(2 ; 5), E(–4 ; –3) et F(5 ; 9)
c) G(–2 ; 1), H(3 ; 4) et I(5 ; 5)

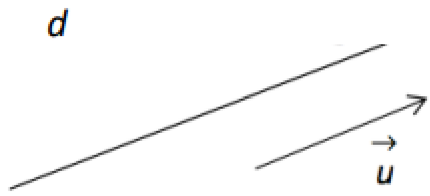
Situation 5

Dans chaque cas proposé ci-contre, dire si le point C appartient à la droite (AB). Justifier.

a) A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7)
b) A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8)
c) A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4)

Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur non nul possédant la même direction que la droite. Pour une droite donnée, il existe **une infinité** de vecteurs directeurs.



Définition

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où les coefficients a et b ne sont pas nuls simultanément. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Propriété

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Démonstration de la propriété

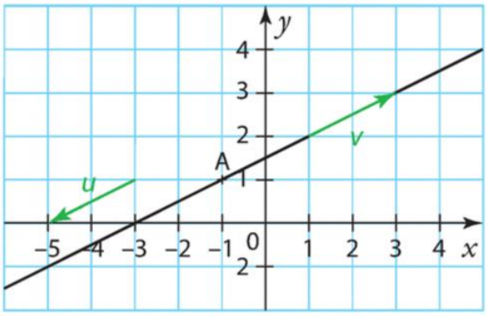
Soit $A(x_A;y_A)$ et $M(x;y)$ deux points du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Nous cherchons à déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Calculer le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur $\vec{u}$.
3. Que peut-on dire de ces deux vecteurs lorsque $M\in(d)$?
4. En déduire la forme générale de l'équation cartésienne de la droite (d).

Application directe

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) passant par le point $B(5;3)$ et le point $C(1;-3)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_3) passant par le point $D(-2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_4) passant par le point $E(1;1)$ et le point $F(6;4)$. Détailler votre raisonnement.

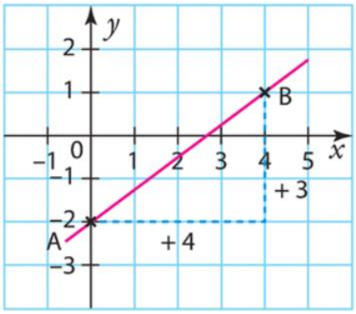
Autres exercices d'application directe

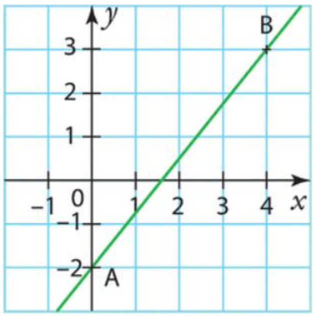


Situation 1

A l'aide des renseignements pris sur le graphique proposé ci-contre, déterminer un vecteur directeur de la droite, un point spécifique de la droite et en déduire une équation cartésienne de la droite proposée.

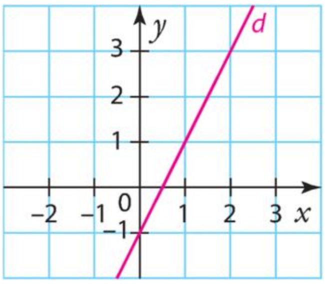
Situation 2

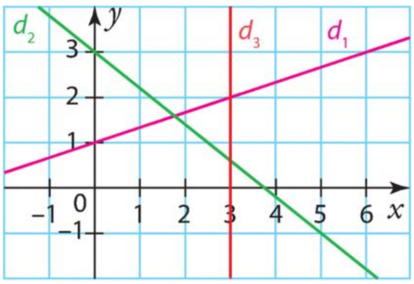




Déterminer dans chaque situation, un vecteur directeur, un point spécifique et une équation cartésienne de la droite proposée.

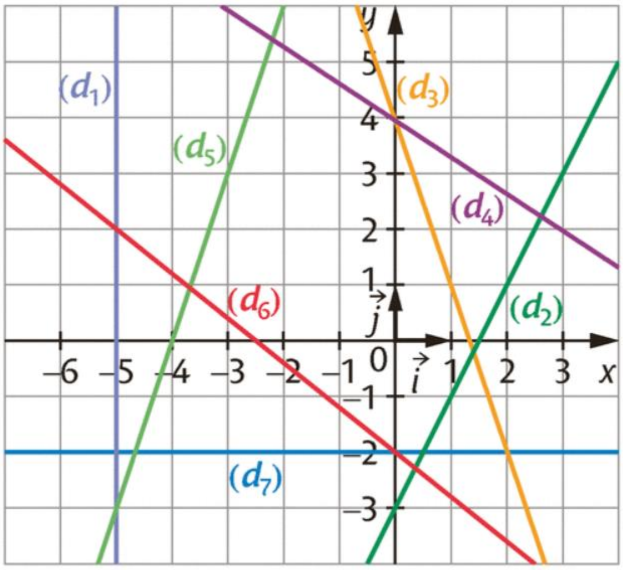
Situation 3





Déterminer dans chaque situation, un vecteur directeur, un point spécifique et une équation cartésienne de la droite proposée.

Situation4



On considère ci-contre sept droites tracées dans un repère.

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune des sept droites.
2. En déduire la forme générale d'une équation cartésienne pour chacune des sept droites.
3. En utilisant un point spécifique de chaque droite, compléter la détermination de l'équation cartésienne de chaque droite.

Equation réduite d'une droite

Rappelons que toute droite non verticale du plan admet une **équation réduite** de la forme $y = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** de la droite et où p est l'**ordonnée à l'origine**.

Démontrer ce résultat puis, retrouver les équations réduites de toutes les droites de cette page.

Pente et ordonnée à l'origine

On considère la droite d'**équation réduite** $y = mx + p$.

Propriétés

Le vecteur de coordonnée $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite. m est appelée la pente.

Le **point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées** a pour coordonnées $(0; p)$.

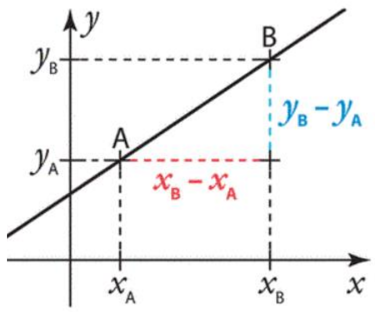
Démonstration des deux propriétés

1. Déterminer une équation cartésienne de cette droite et en déduire un vecteur directeur.
2. A l'aide de l'un des deux types d'équation déterminer l'ordonnée du point d'abscisse nulle.

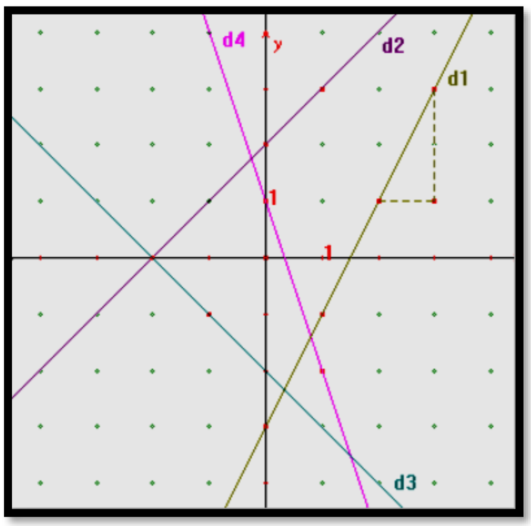
Conséquences

Si $m > 0$ alors la droite « monte », on dit qu'elle est croissante. Si $m < 0$ alors la droite « descend », on dit qu'elle est décroissante. Si $m = 0$ alors la droite est « horizontale », parallèle à l'axe des abscisses. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

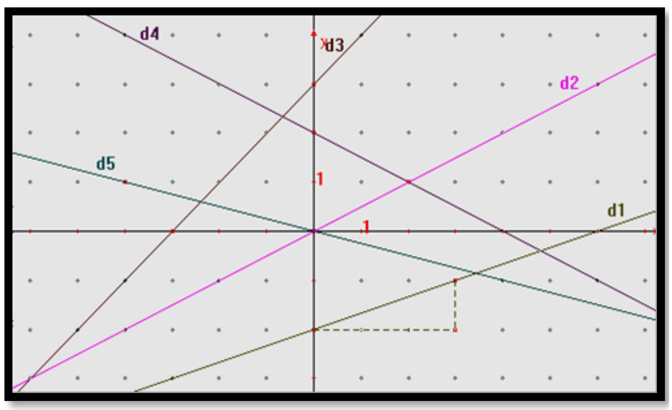
Pour mémoire, le coefficient directeur m (ou la pente) d'une droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'un repère est donnée par la formule suivante $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
On dit que la pente est le quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal pour aller d'un point à un autre.



Application directe



Déterminer les équations réduites (puis les équations cartésiennes) des neuf droites proposées.



On considère une droite non verticale d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et d'équation réduite $y = mx + p$. Exprimer m et p en fonction de a, b et c.

Position relative de deux droites dans le plan

Deux droites du plan peuvent être soit **sécantes**, soit **parallèles**, soit **confondues**.

Deux droites d'**équations réduites** respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** si et seulement si $m = m'$. Si de plus $p = p'$, alors elles sont parallèles et ont un point en commun alors elles sont confondues.

Deux droites d'**équations cartésiennes** respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont **parallèles** si et seulement si $ab' - ba' = 0$. Si de plus elles ont un point en commun alors elles sont confondues.

Démonstration des deux propriétés

Quels sont les vecteurs directeurs des droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$? A quelle condition ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

Quels sont les vecteurs directeurs des droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$? A quelle condition ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

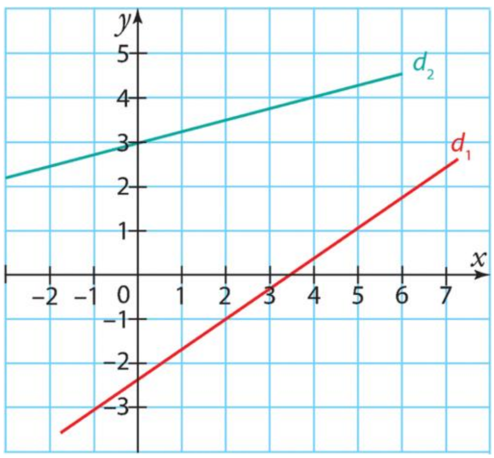
Application directe

Situation 1

Déterminer les équations cartésiennes des deux droites (d1) et (d2) proposées ci-contre.

Les deux droites sont-elles sécantes ? Justifier.

A l'aide de la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues déterminer les coordonnées du point d'intersection.



Situation 2

On a proposé ci-contre 4 couples de droites en précisant une équation cartésienne de chacune d'entre elles. Déterminer, lorsqu'il existe, les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Détailler raisonnement et calculs.

a) $2x - 3y - 1 = 0$ et $-4x + 3y + 2 = 0$
b) $-3x + 2y + 1 = 0$ et $x + 3y - 3 = 0$
c) $x - y + 1 = 0$ et $-3x + 3y - 2 = 0$
d) $2x - y + 1 = 0$ et $-6x + 3y - 3 = 0$

Situation 3

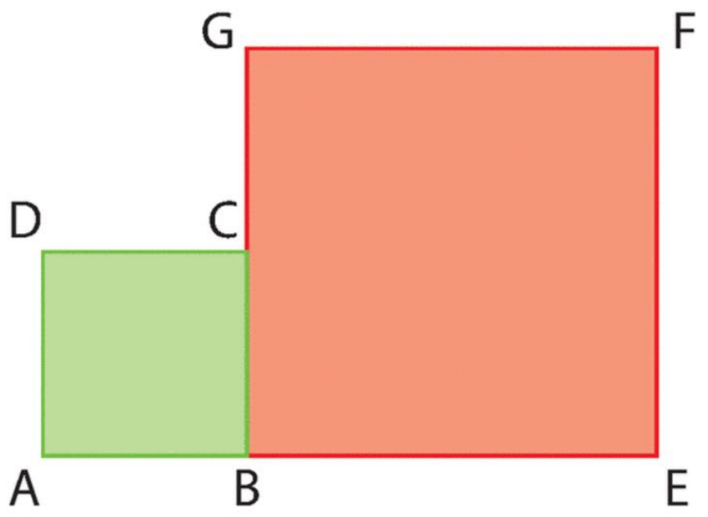
On considère les trois problèmes suivants : « Déterminer deux entiers dont la différence est 8 et dont la somme est 36 », « Déterminer deux entiers dont la différence est 7 et dont la différence des carrés est 21 », « Déterminer la composition d'une tirelire dans laquelle il y a 20 pièces, certaines de 1 euro, d'autres de 2 euros, pour un total de 36 euros ».

Sauriez-vous d'une part résoudre chacun des trois problèmes puis illustrer la réponse obtenue par un graphique faisant intervenir deux droites sécantes dans un repère et leur point d'intersection ?

Résolution de problèmes

Situation 1

Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ on considère le carré ABCD de coté 1 et le carré BEFG de coté 2 comme l'indique la figure proposée ci-contre.



1. Déterminer les équations cartésiennes des droites (CE), (DF) et (AG).
2. Démontrer qu'elles sont concourantes en un même point K dont vous préciserez les coordonnées.
3. Reprendre le problème précédent avec un carré ABCD de coté 1 et un carré BEFG de côté a où a est un réel quelconque.

Situation 2

J'achète deux t-shirts et un jean et paye 120 euros. La semaine suivante le magasin annonce 50% de réduction sur les t-shirts et 30% de réduction sur les jeans. Je décide d'y retourner et achète 6 t-shirts et 2 jeans pour 174 euros. Combien ai-je économisé lors de ce deuxième achat ?

Situation 3

Pour me rendre d'un point A à un point B, je me déplace sur une autoroute à vitesse constante. Selon que j'augmente ou diminue ma vitesse moyenne de 20 km/h, je gagne 2 minutes ou perds 3 minutes. Quelle distance sépare A et B ?

Situation 4

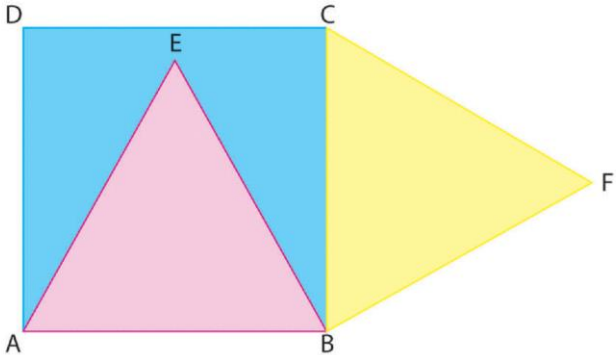
Un jardin carré est bordé par une allée de largeur constante et de surface 464 mètres carrés. Quand on se promène autour de ce jardin il y a une différence de 32 mètres entre le parcours effectué sur le bord extérieur de l'allée et celui effectué sur le bord intérieur de l'allée. Déterminer la surface totale du jardin.

Situation 5

ABCD est un carré de coté égal à 1.

On considère les points E et F tels que, ABE soit un triangle équilatéral tracé à l'intérieur du carré et que BFC soit un triangle équilatéral tracé à l'extérieur du carré.

Démontrer que D, E et F sont alignés.



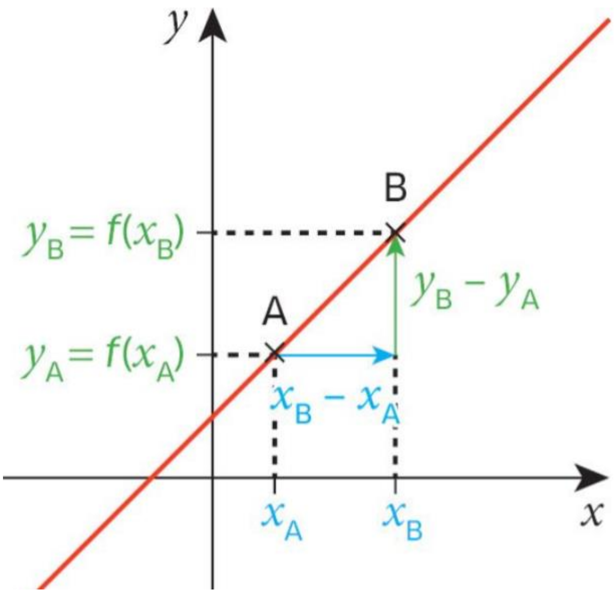
Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie par l'expression $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels. La **représentation graphique** d'une fonction affine est une droite d'équation réduite $y = mx + p$ où m et p sont respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine.

Si $m > 0$ alors la fonction est **croissante**. Si $m < 0$ alors la fonction est **décroissante**. Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

Lorsque $p = 0$ on dit que la fonction est **linéaire**. La représentation graphique est alors une droite passant par l'origine.

La propriété des accroissements indique que quels que soient x_A et x_B deux nombres réels, si f est une fonction affine alors la quantité $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ est constante et égale à m, coefficient directeur de la droite.



Démonstration

Démontrer, dans le cadre d'une fonction affine, la propriété des accroissements constants.

Application directe

Le lièvre et la tortue disputent une course. La tortue parcourt 0,5 mètre en une seconde. Elle part avec 40 mètres d'avance sur le lièvre. Le lièvre lui parcourt 2,5 mètres en une seconde. La piste mesure 100 mètres. On appelle x le nombre de secondes écoulées. Exprimer $f(x)$ la distance qui sépare la tortue du départ de la piste. Quelle est la nature de cette fonction ? Exprimer $g(x)$ la distance qui sépare le lièvre du départ de la piste. Quelle est la nature de cette fonction ?

On travaillera dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm pour dix secondes écoulées en abscisses et 1 cm pour 10 mètres parcourus en ordonnées. Tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = 0,5x + 40$. Tracer la représentation graphique de la fonction $g(x) = 2,5x$. Tracer la représentation graphique de la fonction $h(x) = 100$. Quelle est la nature de cette fonction et à quoi correspond cette fonction dans le cadre de cette situation ?

1. Déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la tortue. Comment expliquez-vous graphiquement ce résultat ?

2. Déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la ligne d'arrivée. Comment expliquez-vous graphiquement ce résultat ?

3. Déterminer au bout de combien de temps la tortue aura dépassé la ligne d'arrivée. Le résultat sera converti en minutes. Comment expliquez-vous graphiquement ce résultat ?

Autres exercices d'application directe

Situation 1

Deux entreprises de location de matériel louent une même machine aux tarifs suivants :

- Tarif A = 300 € par jour de location.
- Tarif B = un forfait de 1000 € puis 200 € par jour de location.

1. On appelle $f(x)$ le prix payé pour x jours de location avec le tarif A.
   Déterminer l'expression de $f(x)$. Quelle est la nature de la fonction f ?

2. On appelle $g(x)$ le prix payé pour x jours de location avec le tarif B.
   Déterminer l'expression de $g(x)$. Quelle est la nature de la fonction g ?

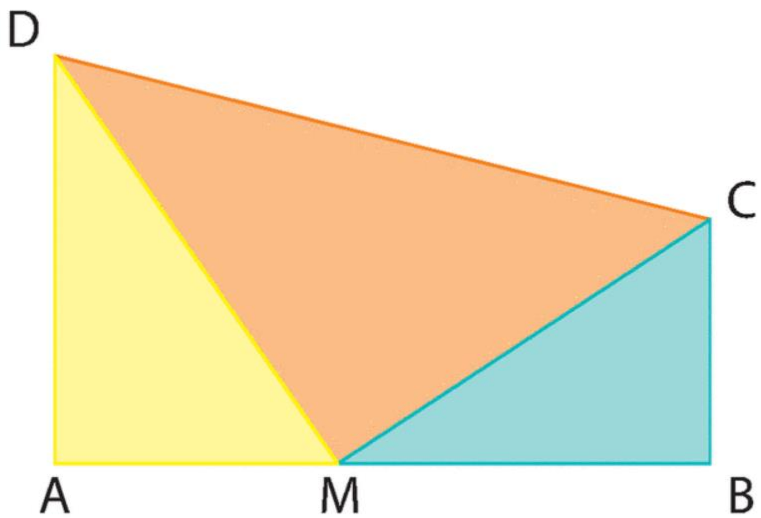
3. Représenter dans un repère les courbes représentatives des fonctions f et g.

4. Répondre graphiquement aux questions suivantes. Pour quelle durée de location les deux tarifs sont-ils égaux ? Quand a-t-on intérêt à choisir le tarif A ? Quand a-t-on intérêt à choisir le tarif B ?

5. Retrouver les résultats précédents par résolution algébrique d'un système d'équations.

Situation 2

ABCD est un trapèze avec AB=8, AD=5 et BC=3. Pour tout point M du segment [AB] on note x la distance AM.



1. Déterminer les aires des triangles AMD et BMC en fonction de x.

2. Déterminer l'aire du trapèze ABCD puis en déduire l'aire du triangle CMD en fonction de x.

3. On appelle f, g et h les fonctions qui à x associent respectivement l'aire du triangles AMD, l'aire du triangle BMC et l'aire du triangle CND. Construire les courbes représentatives de ces trois fonctions dans un même repère.

4. Graphiquement, peut-on trouver un point M tel que AMD et CMD aient la même aire ? Peut-on trouver un point M tel que AMD et BMC aient la même aire ? Peut-on trouver un point M tel que BMC et CMD aient la même aire ?

5. Retrouver par le calcul les trois résultats précédents.