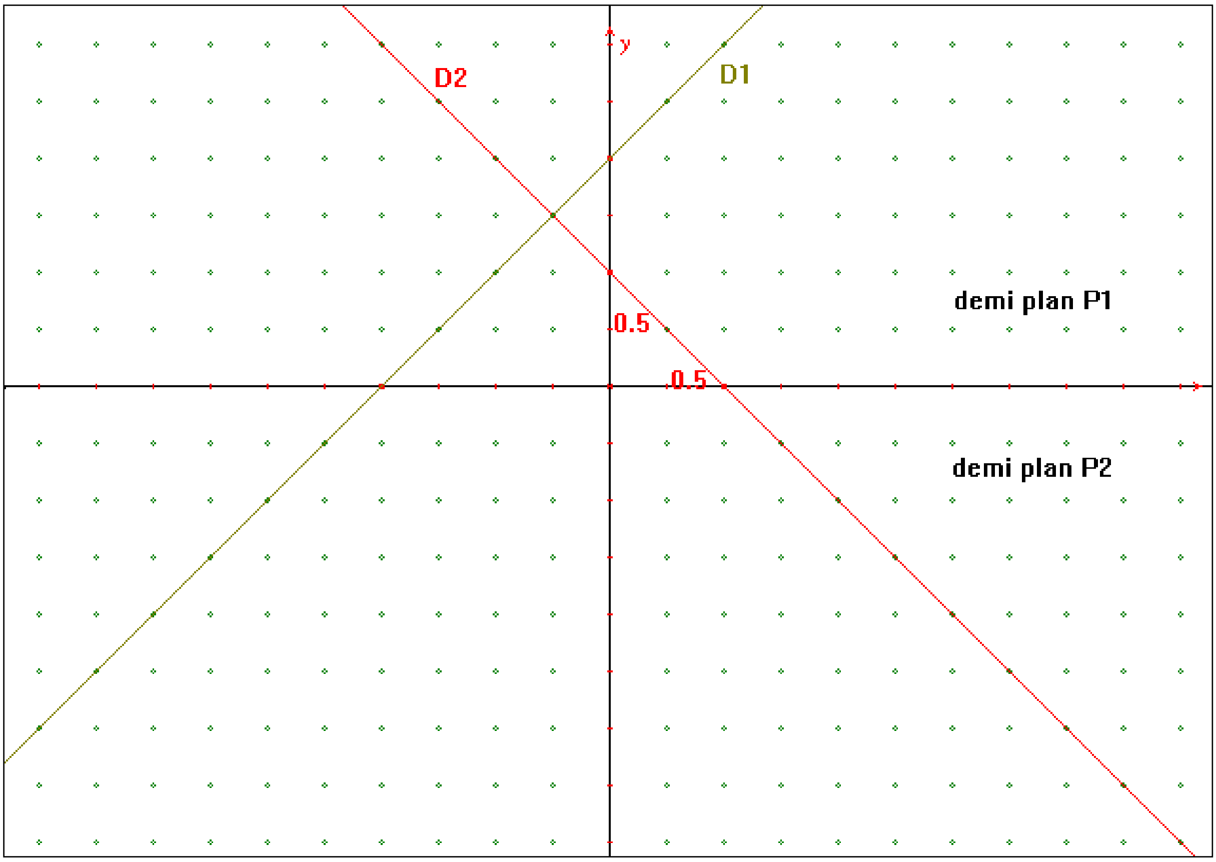
Etude du signe d'une expression du type $(ax+b)\times(cx+d)$

Lire sur le graphique les ordonnées des points de la droite (D1) dont les abscisses sont dans la 1ère ligne du tableau. Effectuer le même travail avec les points de la droite (D2). Effectuer le produit des ordonnées et reporter les résultats dans la dernière ligne. Placer les points dont les coordonnées sont la 1ère ligne pour l'abscisse et la 4ème pour l'ordonnée.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
(D1)												
(D2)												
Produit												



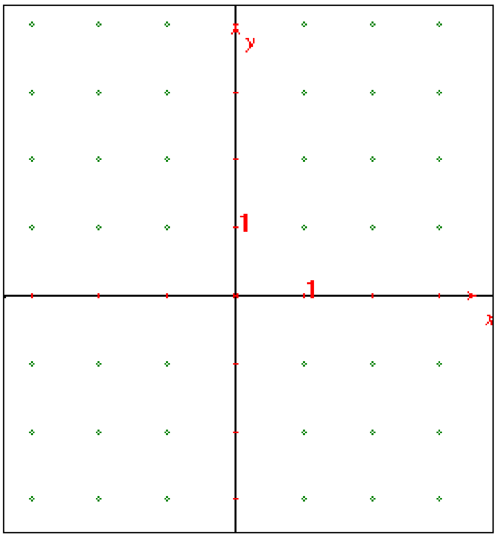
L'axe des abscisses partage le plan en deux demi-plans notés P1 et P2. Suivant les valeurs de x les points de (D1), les points de (D2) et les autres placés à la question 4 sont dans P1 ou dans P2. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Points de (D1)			
Points de (D2)			
Les autres			

Avec l'aide du graphique

Etudier le signe de l'expression $-2x+2$.

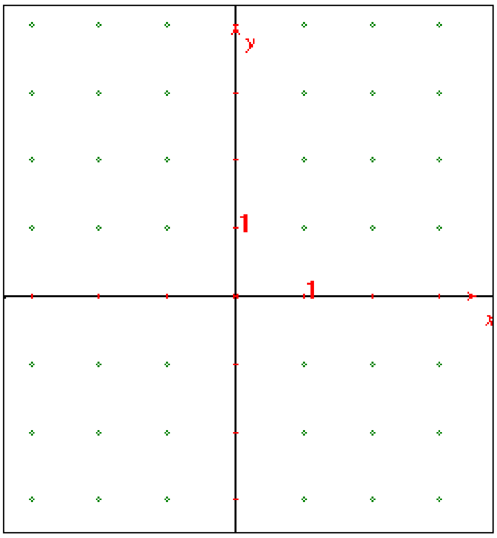
x	$-\infty$	$+\infty$
$-2x+2$		



- Tracé de la droite $y=-2x+2$.
- Calcul de la valeur frontière.

Etudier le signe de l'expression $0,5x+1$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$0,5x+1$		



- Tracé de la droite $y=0,5x+1$.
- Calcul de la valeur frontière.

A l'aides des résultats précédents, étudier le signe de l'expression $(-2x+2)\times(0,5x+1)$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-2x+2$			
$0,5x+1$			
$(-2x+2)\times(0,5x+1)$			

Sans l'aide du graphique

1. Etudier dans un tableau le signe de l'expression $(x+1)\times(x+5)$.
2. Etudier dans un tableau le signe de l'expression $(4x-8)\times(-4x+6)$.
3. Etudier dans un tableau le signe de l'expression $(7-2x)\times(9-3x)$.

Partie 1

$A(x)=(2x-3)(1-4x)+4x^2-9$. Factoriser l'expression $A(x)$. L'expression étant factorisée sous la forme d'un produit de deux fonctions affines, étudier le signe de l'expression $A(x)$ en fonction de x dans un tableau de signes. Déterminer les solutions de l'équation $A(x)=0$. Résoudre l'inéquation $A(x)\leq 0$

Partie 2

$B(x)=(x-2)(3x-5)+9x^2-25$. Factoriser l'expression $B(x)$. L'expression étant factorisée sous la forme d'un produit de deux fonctions affines, étudier le signe de l'expression $B(x)$ en fonction de x dans un tableau de signes. Déterminer les solutions de l'équation $B(x)=0$. Résoudre l'inéquation $B(x)\leq 0$.

Partie 3

$C(x)=(2x+5)^2+(2x+5)(x-8)$. Factoriser l'expression $C(x)$. L'expression étant factorisée sous la forme d'un produit de deux fonctions affines, étudier le signe de l'expression $C(x)$ en fonction de x dans un tableau de signes. Déterminer les solutions de l'équation $C(x)=0$. Résoudre l'inéquation $C(x)\leq 0$.

Partie 4

$D(x)=(3x+2)^2-(5x-4)^2$. Factoriser l'expression $D(x)$. L'expression étant factorisée sous la forme d'un produit de deux fonctions affines, étudier le signe de l'expression $D(x)$ en fonction de x dans un tableau de signes. Déterminer les solutions de l'équation $D(x)=0$. Résoudre l'inéquation $D(x)\leq 0$.

Trois exercices d'application directe

1. Etablir le tableau de signe de l'expression $f(x)=(x+2)(-x+4)$.
   La résolution de deux équations sera clairement précisée.
   Deux lignes intermédiaires seront disposées dans le tableau.

2. Etablir le tableau de signe de l'expression $g(x)=(2-0,5x)(1-2x)$.
   La résolution de deux équations sera clairement précisée.
   Deux lignes intermédiaires seront disposées dans le tableau.

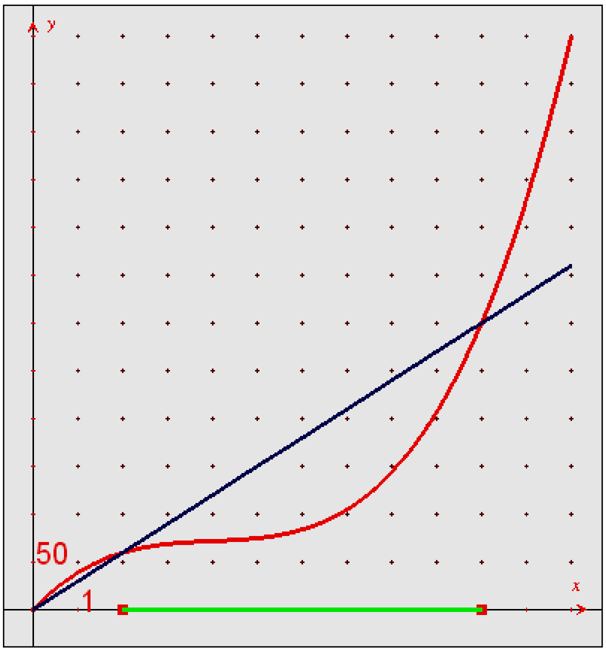
3. Etablir le tableau de signe de l'expression $h(x)=(-2x+2)(0,5x+2)$.
   La résolution de deux équations sera clairement précisée.
   Deux lignes intermédiaires seront disposées dans le tableau.

Partie 5 – Résolution d'un problème

Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production exprimé en milliers d'euros de x tonnes de ce produit. Pour $0 \leq x \leq 12$, des études ont montré que $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x$.

L'entreprise vend son produit 30000 euros la tonne. La recette exprimée en milliers d'euros pour x tonnes de produit est donnée par $g(x) = 30x$.

On appelle $h(x) = g(x) - f(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise pour x tonnes de produit fabriquées et vendues.



Déterminer l'expression $h(x)$. Montrer que $h(x) = -x(x-2)(x-10)$ puis, dresser le tableau de signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[0;12]$. Qu'en déduisez-vous ?

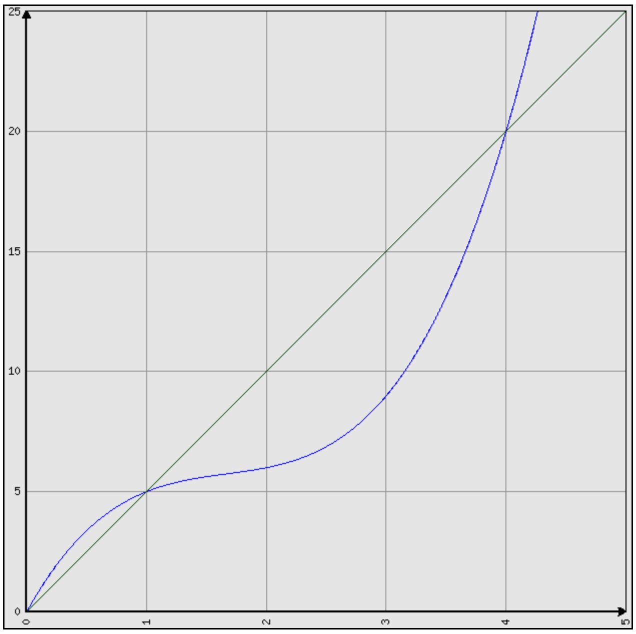
Partie 6 – Résolution d'un autre problème

Une entreprise fabrique et commercialise des copies d'œuvres d'art. Sa capacité de production est limitée à 5000 pièces.

La fonction définie par $\boxed{f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x}$ représente les coûts de production exprimés en milliers d'euros pour x milliers de statues fabriquées avec $x \in [0;5]$.

Chaque copie fabriquée est vendue 5 € l'unité.

Ainsi la fonction définie par $\boxed{g(x) = 5x}$ représente la recette exprimée en milliers d'euros réalisée pour x milliers de statues vendues.



On appelle $h(x) = g(x) - f(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise pour x milliers de statues fabriquées et vendues. Déterminer l'expression $h(x)$. Montrer que $h(x) = -x(x-1)(x-4)$ puis, dresser le tableau de signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$.

Déterminer les quantités de statues que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.

Les tableaux de signes au service de la résolution (correcte) d'inéquations

Situation 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$3x \leqslant 4x^2 \qquad 5x^2 < 2x \qquad (2x+7)(x+5) > (4x+5)(x+5)$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$x^2 > 16 \qquad (1-2x)^2 \leqslant 25 \qquad (1-2x)^2 \leqslant (4x-3)^2$$

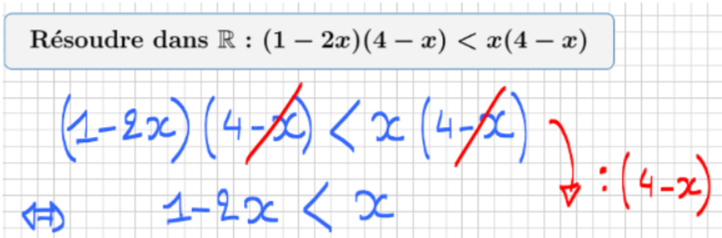
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(2x+1)(3-x) < (3-x)^2 \qquad (x+3)^2 \leqslant (7-3x)^2$$

Dans chacune des inéquations proposées vous vous appuierez sur un tableau de signes.

Situation 2

Expliquer pourquoi le raisonnement proposé ci-contre est erroné puis proposer une correction afin d'apporter la solution correcte.

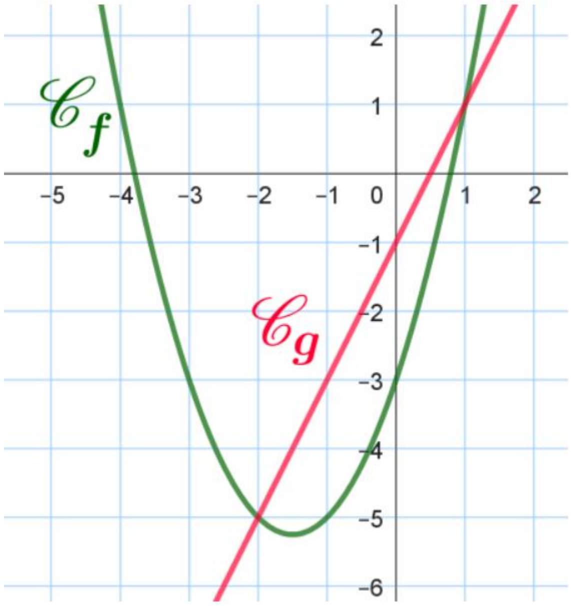


Situation 3

On considère ci-contre les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 3x - 3$$

$$g(x) = 2x - 1$$

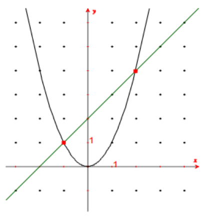


Montrer dans un premier temps que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on s l'égalité $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

En déduire, par résolution d'une inéquation que vous proposerez, la position relative des courbes C_f et C_g représentatives de f et g.

Situation 4

On considère ci-contre les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$. Après avoir montré que $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, étudier la position relative des courbes C_f et C_g.



Le cas particulier des inéquations faisant intervenir un quotient

Situation 1

Déterminer dans un premier temps les tableaux de signes des quotients suivants :

$$\frac{3x+1}{x-1} \qquad \frac{2-3x}{5-x} \qquad \frac{4x-1}{2-x} \qquad \frac{4x+3}{5x+2}$$

Situation 2

A l'aide de tableaux de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\frac{1-x}{3+2x} > 0 \qquad \frac{5+2x}{4x+1} \leqslant 0 \qquad \frac{2x+1}{2-x} \geqslant 0$$

Situation 3

A l'aide de tableaux de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\frac{2}{x-2} < \frac{3}{x+1} \qquad \frac{2x+1}{x+2} \geqslant 3 \qquad \frac{1}{x} < \frac{1}{2x-1}$$

Attention dans cette troisième situation, il sera nécessaire de transformer les inéquations proposées avant de dresser le tableau de signes et la détermination du ou des intervalles réponses.

Situation 4

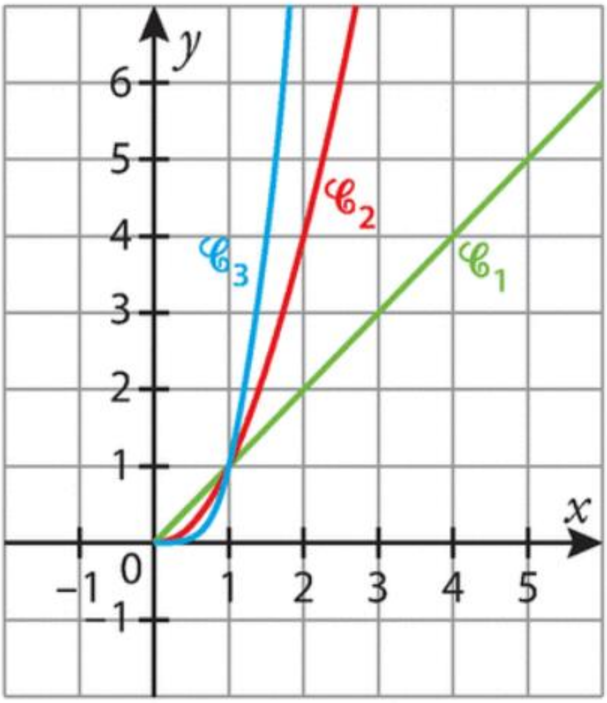
Ci-dessous un recueil d'inéquations de différents types pour pouvoir s'entrainer.

1) $x(x-1) \geqslant 0$	5) $\dfrac{3-x}{x+4} > 0$	9) $\dfrac{5-3x}{x^2-1} \leqslant 0$	13) $\dfrac{x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{x-3}{x+2}$
2) $(2x-3)(1-7x) < 0$	6) $\dfrac{5-2x}{1-x} \geqslant 0$	10) $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 1$	14) $\dfrac{2x-1}{x+3} > \dfrac{2x}{x-4}$
3) $x^2-16 < 0$	7) $\dfrac{x(x+1)}{3-2x} \leqslant 0$	11) $\dfrac{1-3x}{1-x} \geqslant 2$	15) $\dfrac{x+3}{x^2-1} \geqslant \dfrac{3}{x-1}$
4) $\left(4x^2-9\right)(x+1) > 0$	8) $\dfrac{x^2-9}{1-x} > 0$	12) $\dfrac{x+5}{4-5x} < \dfrac{1}{2}$	16) $\dfrac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$

1) $S =]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$	5) $S =]-4\,;3[$	9) $S =]-1\,;1[\cup [\frac{5}{3}\,;+\infty[$	13) $S =]-\infty\,;-2[\cup [-\frac{7}{11}\,;+\infty[$
2) $S =]-\infty\,;\frac{1}{7}[\cup]\frac{3}{2}\,;+\infty[$	6) $S =]-\infty\,;1[\cup [\frac{5}{2}\,;+\infty[$	10) $S =]-2\,;1]$	14) $S =]-\infty\,;-3[\cup]\frac{4}{15}\,;4[$
3) $S =]-4\,;4[$	7) $S = [-1\,;0] \cup]\frac{3}{2}\,;+\infty[$	11) $S =]-\infty\,;-1] \cup]1\,;+\infty[$	15) $S =]-\infty\,;-1[\cup [0\,;1[$
4) $S =]-\frac{3}{2}\,;-1[\cup]\frac{3}{2}\,;+\infty[$	8) $S =]-\infty\,;-3[\cup]1\,;3[$	12) $S =]-\infty\,;-\frac{6}{7}[\cup]\frac{4}{5}\,;+\infty[$	16) $S =]-\frac{3}{2}\,;0[\cup]\frac{1}{2}\,;4[$

Etudier la position relative de trois courbes

On propose ci-contre les courbes représentatives C1, C2 et C3 de trois fonctions de référence f, g et h définies par $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ et $h(x)=x^3$ (fonction identité, carrée et cube).



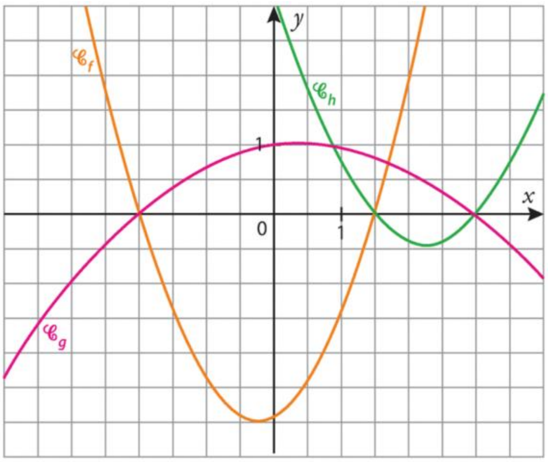
1. Etudier la position relation de la fonction f par rapport à la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Etudier la position relation de la fonction g par rapport à la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Etudier la position relation de la fonction f par rapport à la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Retrouver les expressions de trois fonctions

Sur le graphique proposé ci-contre on a proposé les courbes représentatives de trois fonctions. Elles sont le produit de deux fonctions prises parmi les six fonctions affines suivantes.

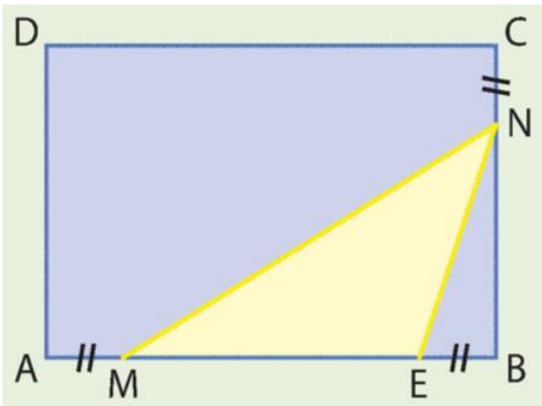


- $u_1(x) = 2x - 3$
- $u_2(x) = 0{,}5x + 1$
- $u_3(x) = \frac{1}{3}x - 1$
- $u_4(x) = 3 - 2x$
- $u_5(x) = -0{,}5x - 1$
- $u_6(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

Retrouver les expressions des trois fonctions.

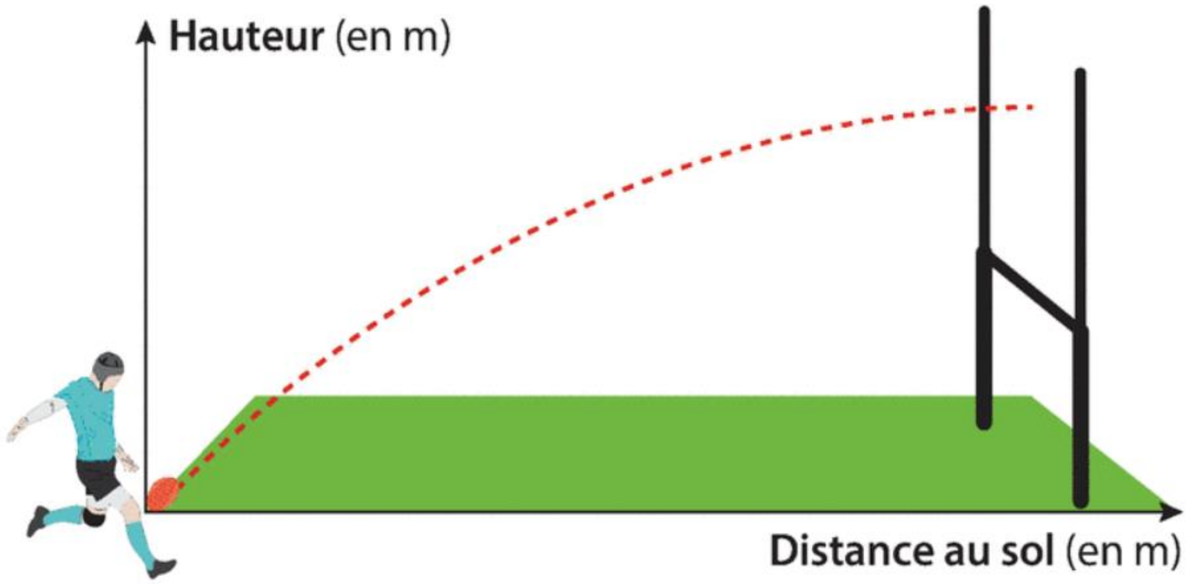
Optimiser l'aire d'un triangle

ABCD est un rectangle tel que AB=8 et AD=4. Le point M est un point du segment [AB]. N et E sont les points des segments [AB] et [BC] tels que AM=BE=CN. On souhaite obtenir une aire du triangle MEN supérieure à 9. On note $x = AM$. A quel intervalle x appartient-il ? Montrer que l'aire de MEN est $16-8x+x^2$. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $(x-1)(x-7)\geq 0$ puis conclure en répondant à la problématique.

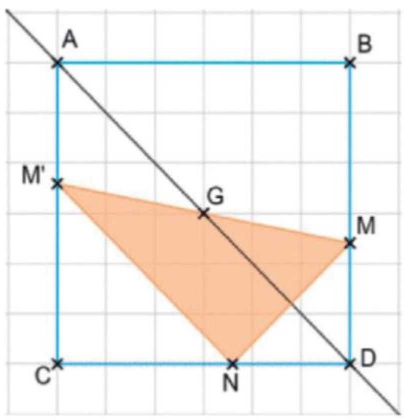


Optimiser la distance de tir

Un joueur de rugby doit envoyer un ballon au-dessus d'une barre de hauteur 3 mètres. On modélise la trajectoire par la fonction f définie par $f(x)=-0,0075x^2+0,375x$ pour $x\in[0;50]$. On souhaite savoir à quelle distance il doit se positionner pour réussir son tir. Montrer que le problème revient à résoudre $-0,0075x^2+0,375x-3>0$. Montrer que $-0,0075x^2+0,375x-3=-0,0075(x-10)(x-40)$ puis conclure.



Optimiser l'aire d'un triangle



ABCD est un carré de coté 6. Le point M est un point du segment [BD]. Le point M' est le symétrique du point M par rapport au centre G du carré. Le point N est le symétrique du point M par rapport à la droite (AD). On souhaite que le triangle MNM' ait une aire supérieure à 5. On note $x = DM$.

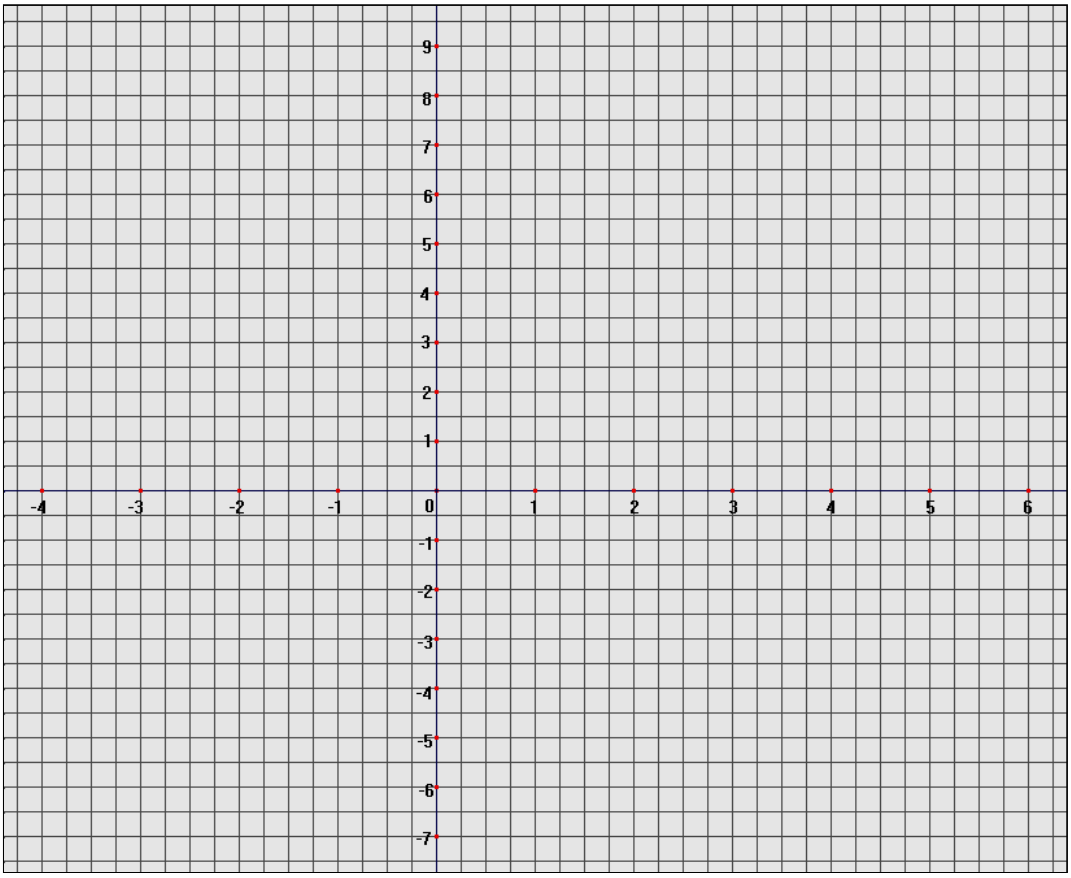
1. A quel intervalle x appartient-il ?

2. Montrer que l'aire de MNM' vaut $-x^2+6x$.

   Montrer que le problème de départ revient à résoudre $-(x-1)(x-5)>0$ et conclure.

Adapter l'offre à la demande

Le prix x d'une paire de chaussure est compris entre 20 et 50 euros. L'offre est le nombre de chaussures qu'une entreprise décide de proposer au prix de x euros. La demande est le nombre de chaussures achetées par les consommateurs pour un prix de x euros. La demande se calcule avec $d(x)=-750x+45000$ et l'offre avec $f(x)=-\dfrac{500000}{x}+35000$. Le but est de déterminer les prix pour lesquels l'offre dépasse la demande. Démontrer que ce problème revient à résoudre l'inéquation $\dfrac{3x^2-40x-2000}{x}\geq 0$. Montrer que $3x^2-40x-2000=(x+20)(3x-100)$, puis conclure.



On considère le fonction f définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $f(x)=(x-1)^2-4$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessus.

Autres formes de l'expression algébrique

2. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x)=x^2-2x-3$.
   Cette forme est la forme développée de l'expression.

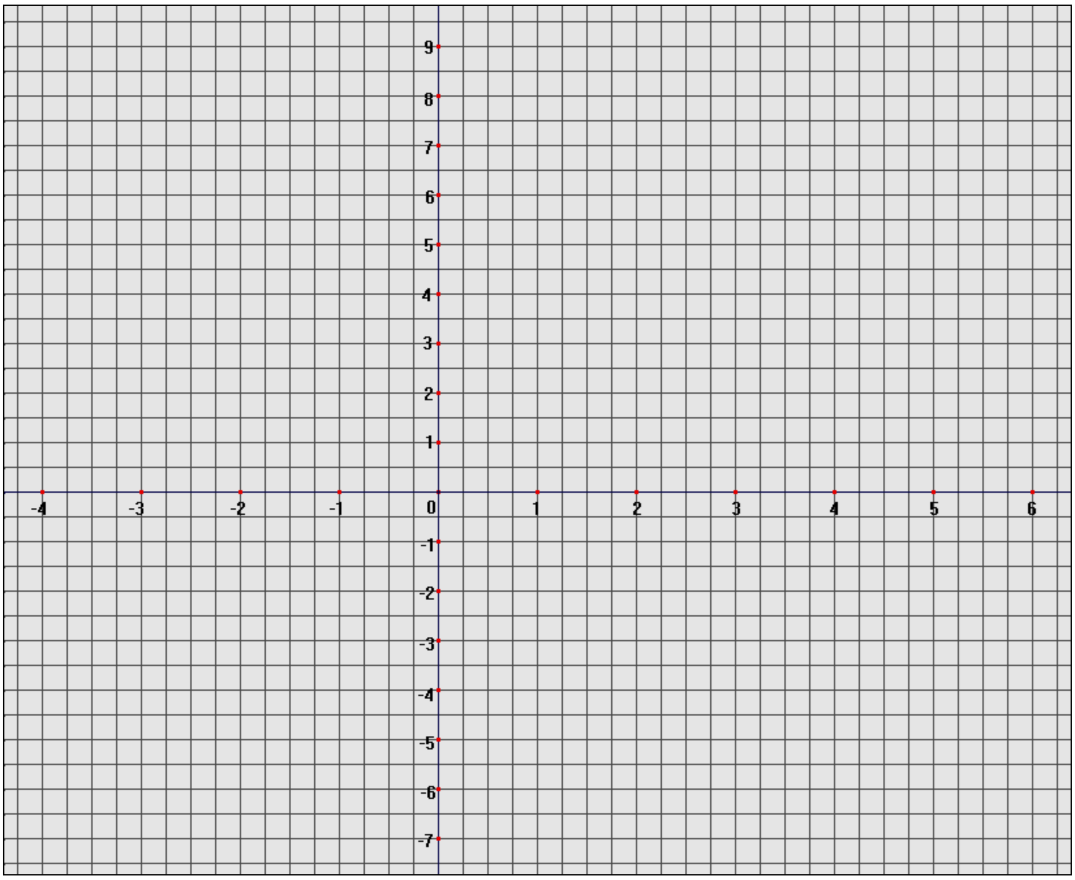
3. Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x)=(x+1)(x-3)$.
   Cette forme est la forme factorisée de l'expression.

Utilisation réfléchie de l'une ou l'autre des expressions

4. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant l'expression la mieux adaptée.

- Calculer $f(-1)$.
- Calculer $f(3)$.
- Résoudre $f(x)=0$.
- Résoudre $f(x)=-4$.
- Calculer $f(1)$.
- Calculer $f(0)$.
- Résoudre $f(x)=-3$.
- Résoudre $f(x)=5$.

5. Quelles informations graphiques contiennent chacune des trois expressions de f ?



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par $f(x)=-(x-1)^2+9$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessus.

Autres formes de l'expression algébrique

2. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x)=-x^2+2x+8$.
   Cette forme est la forme développée de l'expression.

3. Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x)=(x+2)(4-x)$.
   Cette forme est la forme factorisée de l'expression.

Utilisation réfléchie de l'une ou l'autre des expressions de la fonction f

4. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant l'expression la mieux adaptée.

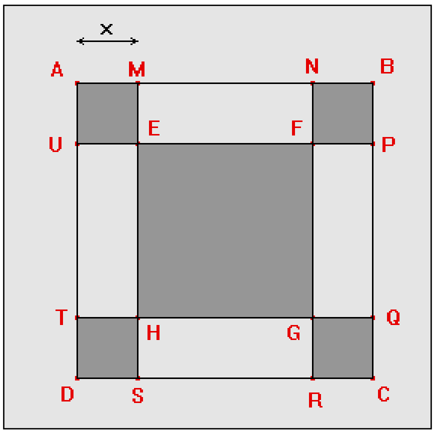
- Calculer $f(4)$.
- Calculer l'image de 1.
- Résoudre $f(x)=0$.
- Résoudre $f(x)=9$.
- Calculer $f(-2)$.
- Calculer l'image de 0.
- Résoudre $f(x)=8$.
- Résoudre $f(x)=5$.

5. Quelles informations graphiques contiennent chacune des trois expressions de f ?

Vocabulaire

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ un **trinôme du second degré** avec $a\neq 0$. On peut parfois écrire le trinôme sous la **forme canonique** suivante : $f(x)=a(x-u)^2+v$. Dans cette écriture les paramètres u et v représentent **les coordonnées du sommet** de la parabole.

Partie A

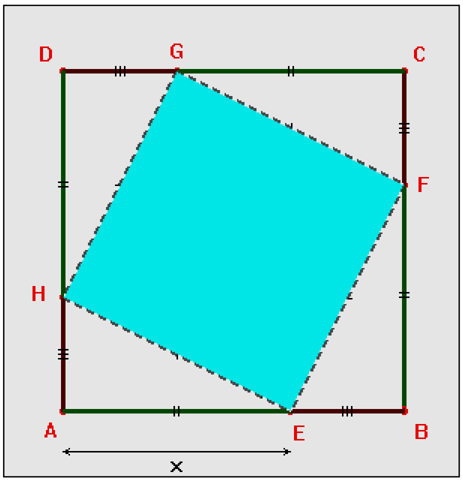


Le quadrilatère ABCD est un carré de 4 cm de coté. Les points M, N, P, Q, R, S, T et U sont tels que AM=NB=BP=QC=CR=SD=DT=UA.

Ces longueurs sont égales et valent x avec $0\leq x\leq 2$. Le but est de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire colorée est minimale.

1. Déterminer à quel intervalle appartient le nombre réel x.
   -
2. Montrer que la fonction définie par $f(x)=8x^2-16x+16$ représente l'aire de la partie colorée en fonction de x.
3. Déterminer la forme canonique de f et en déduire la valeur de x pour laquelle l'aire colorée est minimale.
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire colorée est égale à 10.

Partie B

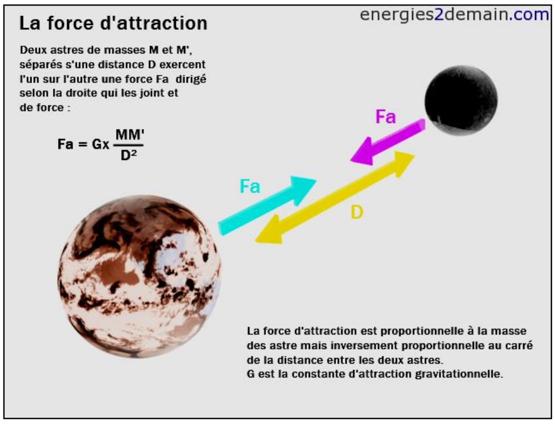


$ABCD$ est un carré de 6 cm de coté. Le point E appartient au segment $[AB]$. On note x la longueur AE. Le but est de déterminer la position des points E, F, G et H pour laquelle l'aire du carré $EFGH$ est minimale.

1. Déterminer à quel intervalle appartient x.
   -
2. Montrer que la fonction définie par $f(x)=2x^2-12x+36$ représente l'aire colorée en fonction de x.

-

3. Déterminer la forme canonique de f et en déduire la valeur de x pour laquelle l'aire colorée est minimale.
   -
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire colorée est égale à 26. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire colorée est égale à 20.



Lorsqu'une fusée de masse M (ou tout autre corps de l'espace) est situé sur la droite Terre/Lune, il subit :

- Une attraction de la part de la Terre proportionnelle au produit des deux masses (celle de la Terre et celle de la fusée) et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare la Terre de la fusée,
- Une attraction de la part de la Lune proportionnelle au produit des deux masses (celle de la Lune et celle de la fusée) et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare la Lune de la fusée.

Dans ce problème, on appelle x la distance qui sépare la fusée de la Terre, M la masse de la fusée, M_T la masse de la Terre, M_L la masse de la Lune, G le coefficient de proportionnalité appelé la constante d'attraction gravitationnelle.

Dans ce problème, on considère que : la distance Terre/Lune est égale à 400 milliers de kilomètres et que la masse de la Terre est 81 fois supérieure à la masse de la Lune. Le millier de kilomètre sera l'unité de mesure.

Le but du problème est de déterminer les endroits de la droite Terre/Lune où l'attraction exercée par la terre et l'attraction exercée par la lune sur la fusée M sont identiques.

<u>Etude des paramètres du problème</u>

Exprimer, en fonction de x, la distance qui sépare la fusée de la lune. Exprimer, en fonction de x, l'attraction F_T de la terre sur la fusée. Exprimer, en fonction de x, l'attraction F_L de la lune sur la fusée.

<u>Résolution de l'équation du problème</u>

Modéliser le problème par une équation (E) faisant intervenir les lettres G, M, M_T, M_L et x. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2-810x+162000=0$. Déterminer la forme canonique du trinôme $x^2-810x+162000$. En déduire les solutions de l'équation (E).

<u>Réponse au problème posé</u>

Répondre précisément au problème posé. On pourra éventuellement faire un schéma.