Equilibrio e bilancia

Sulla bilancia equilibrata, le palline rosse hanno tutte la stessa massa m espressa in grammi.

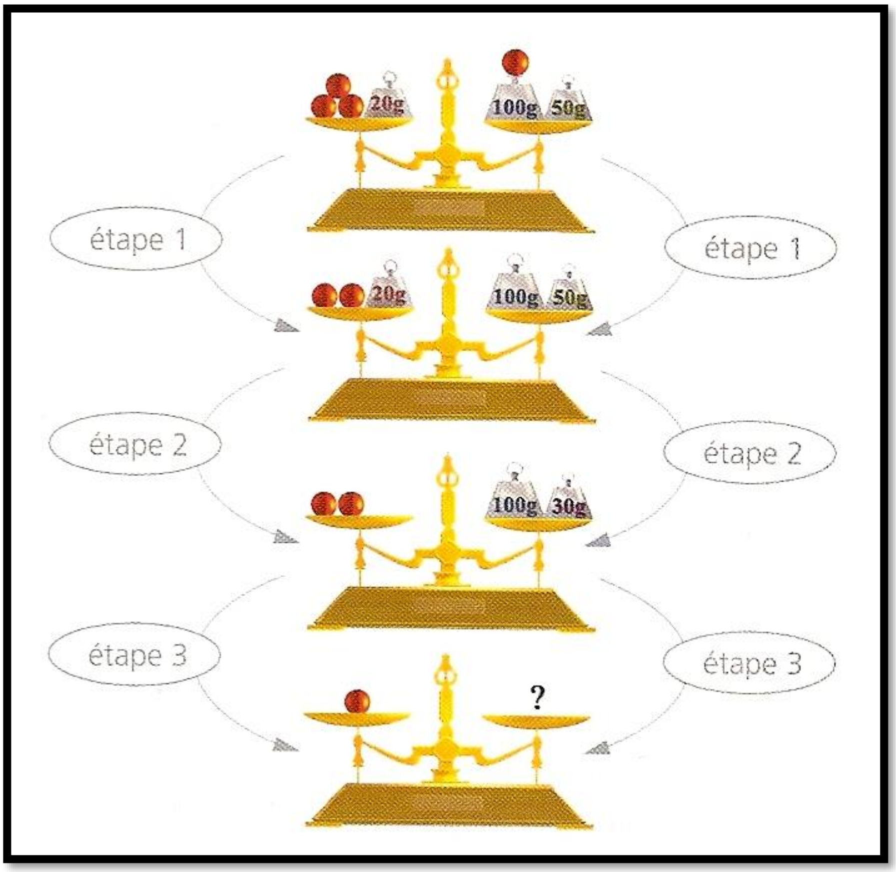
Scrivi un'uguaglianza che rappresenti l'equilibrio della prima bilancia.

Scrivi un'uguaglianza che rappresenti l'equilibrio della seconda bilancia.

Scrivi un'uguaglianza che rappresenti l'equilibrio della terza bilancia.

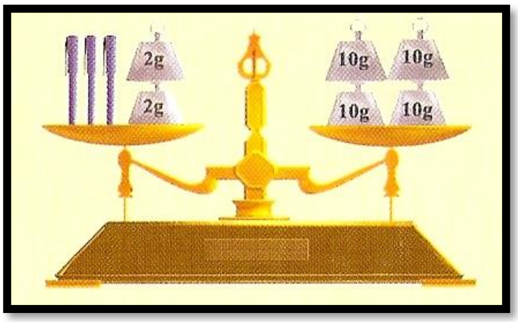
Scrivi un'uguaglianza che rappresenti l'equilibrio della quarta bilancia.

L'equilibrio viene mantenuto ad ogni passaggio ? Perché ?

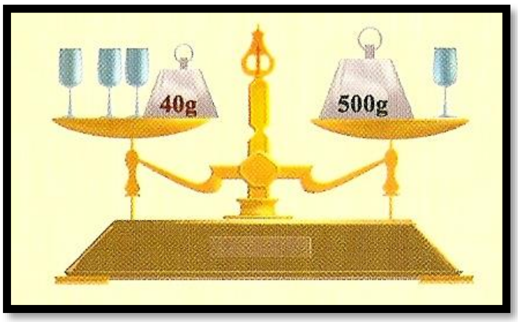


Calcolare il peso di un CD.

Calcolare il peso di un DVD.



Calcolare il peso di una penna.



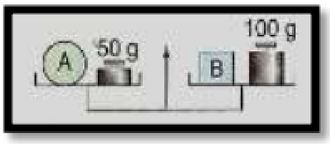
Calcolare il peso di un bicchiere.

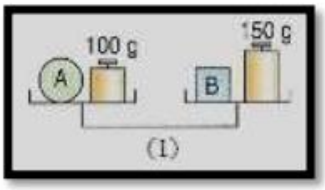
Esercizio 1

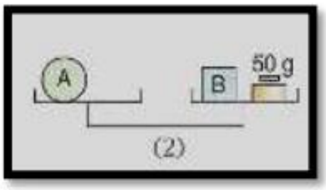
1. Penso a un numero, lo moltiplico per 2, aggiungo 10 e ottengo 16. Qual è il numero ?
2. Penso a un numero, lo moltiplico per 6, sottraggo 2 e ottengo 22”. Qual è il numero ?

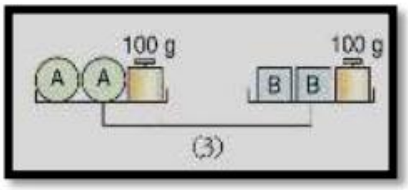
Esercizio 2

La prima bilancia è equilibrata. E le altre tre ?
Se la bilancia non è equilibrata, correggere…



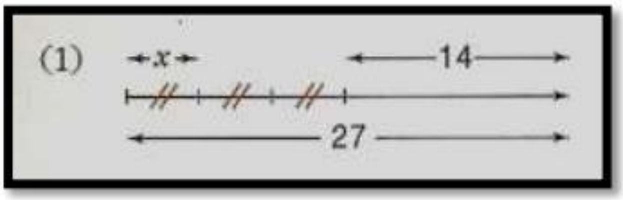


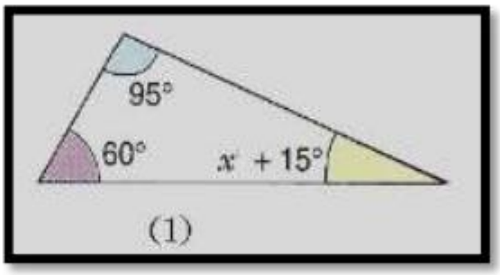


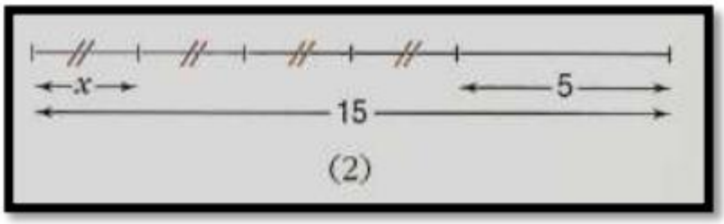


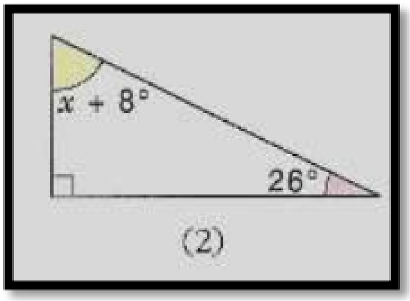
Esercizio 3

In ogni situazione, trovare il valore di x.

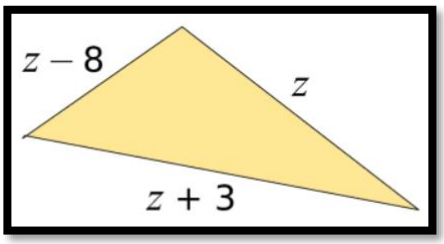




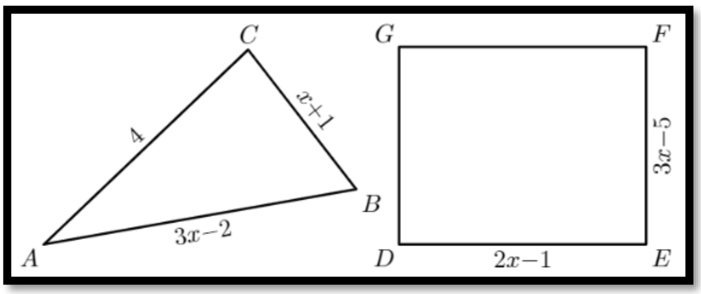




Esercizio 4



Trovare il valore di z per il quale il triangolo ha un perimetro di 61 cm.



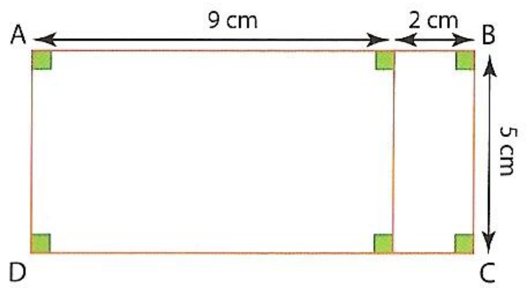
Trovare il valore di x per il quale il triangolo ABC e il rettangolo DEFG hanno lo stesso perimetro.

Esercizio 5

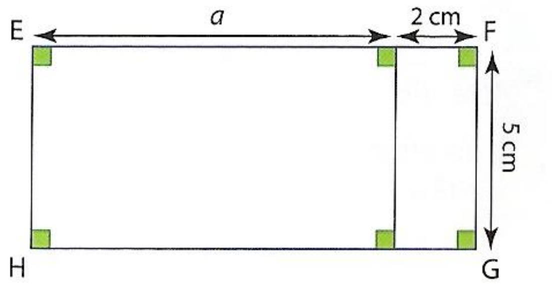
Riesci a trovare tre numeri naturali consecutivi la cui somma è uguale a 2022 ?

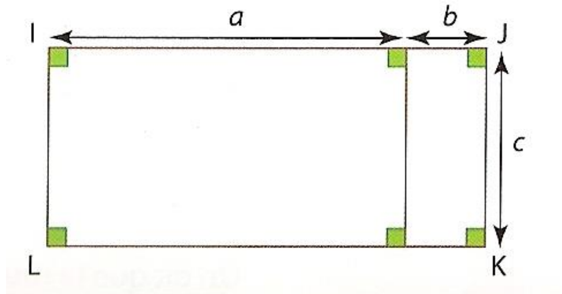
La proprietà distributiva

- Esprimi l'area del rettangolo ABCD in due modi.
- Esprimi l'area del rettangolo EFGH in due modi.



- Esprimi l'area del rettangolo IJKL in due modi.





Trovare diverse coppie di espressioni numeriche uguali.

$12 \times (7 + 4)$; $15 \times (8 - 5)$; $12 \times 7 + 4$; $21 \times 17 + 14$;
$7 \times (3,5 + 4,2)$; $18 \times (7 - 2,5)$; $(12 \times 7) + 4$; $7 \times 3,5 + 7 \times 4,2$;
$12 \times 7 + 12 \times 4$; $21 \times (17 + 14)$; $18 \times 7 - 2,5$; $18 \times 7 - 18 \times 2,5$;
$15 \times 8 - 15 \times 5$; $15 \times 8 - 5$; $7 \times 3,5 + 4,2$; $21 \times 17 + 21 \times 14$.

Trovare diverse coppie di espressioni algebriche uguali.

$12-8x$	$7(4x+1)$	$10x+30$	$7(3x+1)$	$2x+2$	$3(2-3x)$	$8x+2$	$8(x-3)$
$6x+12$	$5(2x+1)$	$8x-24$	$5(2x+6)$	$7x-42$	$2(4x+1)$	$4x-2$	$5(1-x)$
$28x+7$	$3(x-5)$	$21x+7$	$4(3x-2)$	$14x-7$	$4(3x+4)$	$9x+27$	$2(2x-1)$
$5-5x$	$3(2x+4)$	$3x-15$	$8(3x-1)$	$6-9x$	$7(x-6)$	$20-15x$	$3(3x+9)$
$10x+5$	$4(3-2x)$	$24x-8$	$7(2x-1)$	$12x+16$	$2(x+1)$	$12x-8$	$5(4-3x)$

Associa ad un'espressione algebrica della tabella A, un'espressione algebrica equivalente della tabella B.

$4\times(3+x)$	$6\times(3-x)$
$3\times(4+x)$	$2\times(9-x)$
$2\times(3\times x+3)$	$3\times(6\times x-6)$
$6\times(x+2)$	$6\times(x-3)$

Tableau A

$6x+6$	$18-2x$
$4x+12$	$18x-18$
$6x+12$	$6x-18$
$3x+12$	$18-6x$

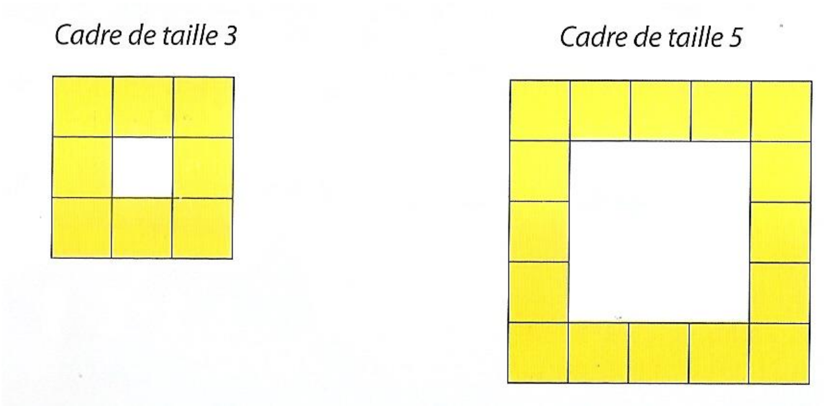
Tableau B

Esercizio 1

n il numero di quadrati su un lato del quadro.

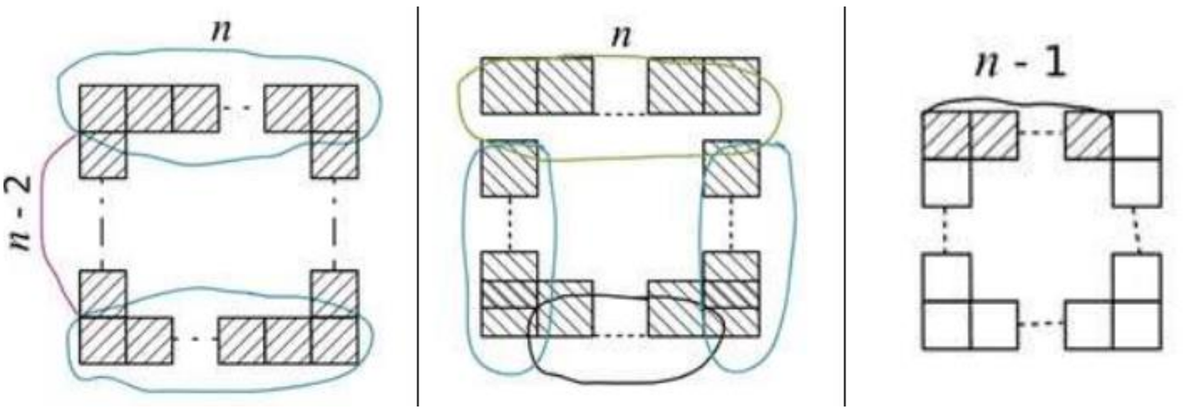
N il numero di quadrati necessari per costruire il quadro.

Calcolare N quando $n=3$. Calcolare N quando $n=5$. Calcolare N quando $n=4$.



Sviluppare le espressioni algebriche e fare un commento :

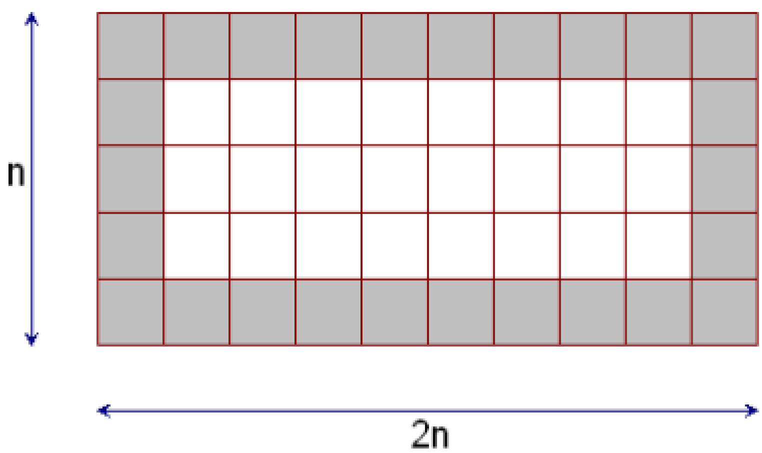
$A = 2n + 2(n-2)$ $\qquad$ $B = n + 2(n-1) + n - 2$ $\qquad$ $C = 4(n-1)$



Se $N = 36$, calcolare il valore di n. Se $N = 396$, calcolare il valore di n.

Esercizio 2

n il numero di quadrati sulla larghezza del rettangolo. $2n$ il numero di quadrati sulla lunghezza del rettangolo. N il numero di quadrati necessari per costruire il bordo del rettangolo. Calcolare N quando $n=3$. Calcolare N quando $n=5$. Calcolare N quando $n=4$.



Sviluppare le espressioni algebriche e fare un commento :

$A = 2n + 2(2n-2)$ $\qquad$ $B = 2(n-1) + 2(2n-1)$ $\qquad$ $C = 2(n+2n) - 4$

Se $N = 56$, calcolare il valore di n. Se $N = 596$, calcolare il valore di n.

Un po' di teoria

Il metodo di **risoluzione delle equazioni di primo grado** prevede di applicare i principi di equivalenza delle equazioni in modo da isolare l'incognita *x* a sinistra dell'uguale e un termine numerico a destra, che equivarrà all'unica soluzione. In caso contrario, un'equazione di primo grado si riduce a un'equazione senza incognite che può essere indeterminata o impossibile.
Per poter comprendere il metodo per risolvere le equazioni di primo grado è fondamentale sapere a cosa si può andare incontro. Tradotto: **quante soluzioni può avere un'equazione di primo grado?**

1) una e una sola soluzione, ossia uno e un solo numero che, sostituito al posto dell'incognita x, rende vera l'uguaglianza (verifica l'equazione). In questo caso diremo che l'**equazione di primo grado è determinata** e indicheremo la soluzione esplicitamente

2) Infinite soluzioni. L'equazione è verificata per qualsiasi valore, ossia sostituendo qualsiasi valore al posto dell'incognita x avremo sempre e comunque un'uguaglianza vera. In tal caso si dice che l'**equazione di primo grado è indeterminata**

3) Nessuna soluzione. Non esiste alcun valore che, sostituito al posto dell'incognita x, rende vera l'uguaglianza. In altri termini l'equazione non è verificata per alcun valore dell'incognita, e diremo che l'**equazione di primo grado è impossibile**

Tutto ruota intorno ai principi di equivalenza delle equazioni, che abbiamo già studiato in termini generali e che riscriviamo in una *forma semplificata per le equazioni di primo grado*

[Primo principio di equivalenza] possiamo sommare o sottrarre una stessa quantità numerica o letterale in cui compare x, a sinistra e a destra dell'uguale, e ottenere un'equazione equivalente.

[Secondo principio di equivalenza] possiamo moltiplicare o dividere per una stessa quantità numerica a sinistra e a destra dell'uguale e ottenere un'equazione equivalente.

I due principi di equivalenza ci permetteranno di procedere per passaggi successivi in modo da semplificare le espressioni algebriche presenti nell'equazione di primo grado fino ad **isolare la x a sinistra dell'uguale e la soluzione numerica a destra**. Il procedimento funziona grazie ai due principi: se ci limitiamo a svolgere solamente operazioni consentite, ad ogni passaggio otterremo un'equazione equivalente alla precedente, ossia un'equazione che presenta le medesime soluzioni.

Quattro esempi

E. 1

$$x+9=15$$
$$x=15-9$$
$$x=6$$

E. 2

$$2x+8=12$$
$$2x=12-8$$
$$2x=4$$
$$x=\frac{4}{2}=2$$

E. 3

$$7x-9=2x+1$$
$$7x-2x=1+9$$
$$5x=10$$
$$x=\frac{10}{5}=2$$

E. 4

$$-2x+3=x-6$$
$$-2x-x=-6-3$$
$$-3x=-9$$
$$3x=9$$
$$x=\frac{9}{3}=3$$

Esercizi

Risolvere le equazioni di primo grado. Verificare.

E. 5
$3(x+2)-2(x-3)=4-x$

E. 6
$3(x+1)-5x=x-15$

E. 7
$6(x+2)-9(x-1)=-2(3x+3)+3$

E. 8
$5(x+1) = 2(x+7)$

E. 9
$10(x+1) = 4(x+7)+6$

E. 10
$4(x+2) = 2x+20$

E. 11
$3(4x-5)-5(2x-1)=5x-16$

E. 12
$11x-8=7(x-1)+x$

E. 26
$3(x+1)-2x=x-1$

E. 27
$5x+4=3(x-2)+2x$

E. 28
$2(x-3)-5=2x-11$

E. 29
$2(x-4)+3x-9=5x-17$

E. 30
$12(x-3)+8x=10(2x+5)$

E. 31
$5(2x+3)=10+5(2x+1)$

E. 32
$-7(x+1)=2-3x-4x$

E. 33
$5(x+2)=2x+3(x+1)$

Equazioni di primo grado con le frazioni

Risolvere l'equazione di primo grado a coefficienti fratti

$$\frac{x-4}{3}-\frac{5-x}{4}=\frac{2x+1}{6}$$

Per risolvere l'equazione di primo grado

$$\frac{x-4}{3}-\frac{5-x}{4}=\frac{2x+1}{6}$$

calcoliamo prima di tutto il minimo comune multiplo tra tutti i denominatori

$$\frac{4(x-4)-3(5-x)}{12}=\frac{2(2x+1)}{12}$$

In virtù del secondo principio di equivalenza, possiamo moltiplicare a destra e a sinistra per 12 ricavando così l'equazione equivalente

$$4(x-4)-3(5-x)=2(2x+1)$$

Eseguiamo le moltiplicazioni applicando a dovere la regola dei segni:

$$4x-16-15+3x=4x+2$$

Siamo in dirittura di arrivo: dobbiamo trasportare tutti i termini con l'incognita a sinistra e quelli senza incognita a destra, ricordando di cambiare il segno a quei termini che passano da un membro a l'altro

$$4x+3x-4x=16+15+2$$

Sommiamo i termini simili

$$3x=33$$

isoliamo l'incognita dividendo i due membri per 3

$$x=\frac{33}{3}$$

e infine riduciamo ai minimi termini la frazione ottenuta

$$x=11$$

Provare con queste due equazioni :

$$\frac{3x-2}{3}+\frac{3+x}{12}=\frac{3x+3}{4}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1-2x}{2}+\frac{4-4x}{10}=\frac{2x-13}{10}-\frac{4x-3}{5}$$

Esercizio 1

$$\frac{2-x}{2}+\frac{3-2x}{11}=\frac{x+1}{3}+5$$

$$\frac{5x-3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{x-7}{2}-\frac{7-x}{5}$$

Esercizio 2

$$\frac{2x-3}{6}+\frac{21-x}{3}-\frac{5}{6}=\frac{21-x}{3}-\frac{x+1}{12}$$

$$\frac{x+1}{2}-\frac{3-x}{4}=2-\frac{1}{3}\cdot(6-2x)$$

Esercizio 3

$$\frac{3\cdot(2x+1)}{5}-\frac{3\cdot(1+x)}{15}=2+\frac{15x-2}{20}$$

$$\frac{3\cdot(2x-1)}{4}-\frac{5\cdot(3x-5)}{3}=\frac{7-4x}{12}+\frac{2}{3}$$

Esercizio 4

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2(2x+3)}{5}-\frac{x+3}{2}$$

$$\frac{2x+3}{2}-\frac{3(x+2)}{4}=\frac{1}{3}-\frac{2-x}{3}$$

Esercizio 5

$$\frac{13x-2}{12}+\frac{2-3x}{10}-\frac{x+1}{5}=1$$

$$\frac{2x-3}{4}+\frac{2x+3}{3}=1+\frac{5}{12}x$$

Esercizio 6

$$-\frac{x+6}{2}+\frac{1}{3}x=-\frac{2x+3}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{9-x}{2}+\frac{1}{20}x=\frac{29}{20}-\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{5}$$

Esercizio 7

$$\frac{1}{6}\cdot(4+x)=1-\frac{1}{9}\cdot(1-2x)$$

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{2}=x-1$$

Esercizio 8

$$\frac{x}{3}-\frac{x-4}{2}=\frac{6-x}{6}+1$$

$$-\frac{x}{2}=\frac{x+2}{5}-\frac{7}{10}x$$

Risoluzione dei problemi tramite un'equazione

Il procedimento per risolvere un problema con le equazioni consiste di pochi, semplici passaggi. Volendolo sintetizzare, potremmo dire che tutto si riduce a:

- tradurre correttamente il testo nella corrispondente equazione;

- risolvere l'equazione.

Più dettagliatamente, le fasi per la risoluzione dei problemi con le equazioni prevedono di...

1) Leggere con attenzione il testo del problema

Anche più volte se necessario! Per cominciare col piede giusto dobbiamo identificare con esattezza i dati e comprendere la logica della traccia.

2) Scegliere l'incognita

Solitamente, soprattutto per i problemi più semplici, l'incognita va scelta in modo che corrisponda al dato richiesto dal problema. Per non peccare di originalità ;) in genere viene indicata con la lettera x.

3) Tradurre il testo nell'equazione risolutiva

Vale a dire, scrivere un'equazione che traduca in linguaggio simbolico il testo del problema. A costo di rileggere la traccia più e più volte, dobbiamo assicurarci che ci sia una perfetta corrispondenza tra ciò che esprime il testo e il significato dell'equazione.

La traduzione ruota tutta intorno all'incognita x e a come essa si collega con gli altri dati del problema.

4) Risolvere l'equazione come visto nella lezione sulle equazioni di primo grado.

5) Verifica conclusiva: **discutere l'accettabilità della soluzione**.

Tre fratelli hanno ciascuno tre euro in più del fratello minore. Sapendo che in totale hanno 40 euro e 20 centesimi, quanti soldi ha il fratello più grande?

Svolgimento: scegliamo come incognita la quantità di soldi del fratello più grande, e rileggiamo il testo.

Soldi del fratello maggiore: x

Soldi del fratello intermedio: $x-3$

Soldi del fratello minore: $(x-3)-3 \quad \to \quad x-6$

Il più è fatto, non ci resta che impostare l'equazione risolutiva

$$x+(x-3)+(x-6)=40,20$$

e risolverla

$$3x-9=40,20$$

$$3x=40,20+9$$

$$3x=49,20$$

$$x=\frac{49,20}{3}=16,40$$

La soluzione è accettabile perché è coerente con il significato dell'incognita (quantità di denaro in euro).

Esercizi

1	Calcola un numero sapendo che il suo quadruplo è 76.
2	Calcola un numero sapendo che il suo doppio aumentato di 7 è 37.
3	Calcola un numero sapendo che i suoi $\frac{5}{6}$ sono uguali a 35.
4	Trova un numero tale che la sua quinta parte aumentata di 5 dia per somma 11.
5	Se moltiplico un numero per 7 e aggiungo la sua quinta parte, ottengo 72. Determina il numero.
6	Se a un numero si aggiunge il suo quadruplo e si sottrae la sua quarta parte, si ottiene 38. Determina il numero.
7	Calcola un numero sapendo che se ad esso viene aggiunta la sua metà, la sua terza parte e la sua decima parte si ha per somma 58.
8	Se si sottrae 10 a un numero e alla metà della differenza si aggiunge $\frac{1}{4}$ del numero stesso si ottiene 40. Trova il numero.
9	Il quadruplo di un numero aumentato della metà del numero stesso dà come risultato il quadrato di 6. Trova il numero.
10	La somma di due numeri pari consecutivi è 26. Calcola i due numeri.

11	Trova due numeri pari consecutivi sapendo che la metà del maggiore supera di 4 la terza parte del minore.
12	Trova due numeri sapendo che la loro somma è 19 e la loro differenza è 11.
13	La somma di un numero con il suo consecutivo sta alla somma del triplo del numero con 17 come 1 sta a 2. Determina il numero.

Prodotti notevoli

I **prodotti notevoli** sono formule di calcolo che permettono di sviluppare velocemente determinate potenze e prodotti tra polinomi, e viceversa di scomporre determinati tipi di polinomi. Tali regole vengono chiamate *prodotti notevoli* perché si riferiscono a prodotti ricorrenti nel calcolo polinomiale.

Quali sono i prodotti notevoli? Quelli più importanti, e più comunemente utilizzabili, sono quelli riportati nella seguente lista:

1) Quadrato di un binomio con somma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2) Quadrato di un binomio con differenza

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3) Prodotto notevole della differenza di quadrati (somma per differenza)

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Dimostrazioni

Come sempre in Matematica ci sono due possibilità: imparare a memoria o capire. Per capire bisogna convincersi che le **formule dei prodotti notevoli** che abbiamo scritto sopra sono valide, e per farlo non ci resta che sviluppare esplicitamente i prodotti tra polinomi e verificare che le formule sono corrette.

1) Sviluppo del quadrato di binomio con somma

$(a+b)^2 =$

$= (a+b)(a+b) =$

$= a^2 + ab + ab + b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2$

2) Sviluppo del quadrato di binomio con differenza

$(a-b)^2 =$

$= (a-b)(a-b) =$

$= a^2 - ab - ab + b^2 =$

$= a^2 - 2ab + b^2$

3) Scomposizione della differenza di quadrati

In questo caso ricaviamo la formula sviluppando il prodotto somma per differenza:

$(a-b)(a+b) =$

$= a^2 + ab - ab - b^2 =$

$= a^2 - b^2$

Applicazioni

Esercizio 1

Verificare l'uguaglianza tra A, B e C, tra D, E e F, tra G, H e I, tra J, K e L, tra M, N e P. Proporre tutti i dettagli sviluppando, quando sarà necessario, i prodotti notevoli.

$A=(x-3)^2-4$ $\quad B=x^2-6x+5$ $\quad C=(x-1)(x-5)$

$D=(x-2)(x+8)$ $\quad E=(x+3)^2-25$ $\quad F=x^2+6x-16$

$G=-x^2+2x+8$ $\quad H=(x+2)(4-x)$ $\quad I=9-(x-1)^2$

$J=x^2+4x-21$ $\quad K=(x+2)^2-25$ $\quad L=(x-3)(x+7)$

$M=(6-x)^2+x^2$ $\quad N=2(x-3)^2+18$ $\quad P=2x^2-12x+36$

Esercizio 2

Ricopiare e completare le uguaglianze :

$(x+...)^2=...+6x+...$ $\quad (...-...)^2=4x^2-...+25$ $\quad (7x-...)(7x+...)=...-64$

$(...+1)^2=9x^2+...+...$ $\quad (6x-...)^2=...-...+16$ $\quad (...-1)(...+1)=81x^2-...$

$(3x+...)^2=...+...+25$ $\quad (2x-...)^2=...-24x+...$ $\quad (...\ ...\ ...)^2=...-16x+16$

$49x^2+...+25=(...\ ...\ ...)^2$ $\quad 4x^2-...=(...-...)(...+1)$ $\quad (...\ ...\ ...)(...\ ...\ ...)=121x^2-4$

Esercizio 3

Ricopiare e completare le uguaglianze :

$x^2+2\times...\times...+16=(...+...)^2$ $\quad 81x^2+2\times...\times...+36=(...+...)^2$ $\quad 36x^2-2\times...\times...+49=(...-...)^2$

$64x^2-1=(...+...)(...-...)$ $\quad 9x^2+2\times...\times...+...=(...+4)^2$ $\quad 49x^2-2\times...\times...+...=(...-9)^2$

$...-64=(...+...)(3x-...)$ $\quad x^2-...=(...+7)(...-...)$ $\quad ...+6x+...=(x+...)^2$

$4x^2-...+25=(...-...)^2$ $\quad ...-64=(7x-...)(7x+...)$ $\quad 9x^2+...+...=(...+1)^2$

$...-...+16=(6x-...)^2$ $\quad 81x^2-...=(...-1)(...+1)$ $\quad ...-4=(3x-...)(3x+...)$

Per allenarsi 1

Risolvi le seguenti equazioni.

- $2x+5(x+3)=6x-4(3x-10)+1$
- $\dfrac{-x+1}{2}+\dfrac{12x-5}{12}=-\dfrac{3x-2}{4}+1-\dfrac{-5x+1}{6}$

Sviluppi i prodotti notevoli seguenti : $(x+1)^2$, $(x-1)^2$, $(x+1)(x-1)$

Risolvi il seguente problema mediante un'equazione : la somma di due numeri è 56, uno è i $\frac{2}{5}$ dell'altro. Calcola i due numeri.

Per allenarsi 2

Risolvi le seguenti equazioni.

- $x-2(x-3)-10=6-3(x+2)$
- $\dfrac{7x+2}{4}+3=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{2x-1}{6}$

Sviluppi i prodotti notevoli seguenti : $(2x+3)^2$, $(2x-3)^2$ e $(2x+3)(2x-3)$

Risolvi il seguente problema mediante un'equazione : la somma delle età di due fratelli è 42 anni e una è 4/3 dell'altra. Quanti anni hanno i due fratelli ?

Per allenarsi 3

Risolvi le seguenti equazioni.

- $5x-6+4x-1=3x+3+x$
- $\dfrac{6x-1}{3}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{5x-6}{12}-\dfrac{1-8x}{4}$

Sviluppi i prodotti notevoli seguenti : $(3x+2)^2$, $(3x-2)^2$ e $(3x+2)(3x-2)$

Risolvi il seguente problema mediante un'equazione : "Un numero aumentato di 4 è uguale al suo doppio diminuito dei suoi 3/4. Calcolate tale numero".

Per allenarsi sulla risoluzione dei problemi

1.

Sommando tre volte lo stesso numero a 2 si ottiene 17.

2.

Trova il numero a cui togliendo 9 dal suo triplo si ottiene l'opposto di 3.

3.

Un numero addizionato ai suoi 4/3, è uguale a 14.

4.

Un numero è tale che la somma della sua metà e 7 è pari ai suoi 2/3 meno 5.

5.

Calcola i tre numeri pari, uno successivo dell'altro, che sommati danno 54.

6.

La somma di un numero, dei suoi tre quarti e dei suoi tre quinti è pari a 47. Trova il numero.

7.

Trova i due numeri tali che la loro somma sia è 224 e uno sia i 3/4 dell'altro.

8.

Aggiungendo 18 ai 2/3 di un numero si ottiene 64. Trova il numero.

9.

Determina il numero i cui 4/5 diminuiti di 4 sono uguali ai suoi 2/3 aumentati di 2.

10.

Due numeri naturali consecutivi sono tali che la somma di un quinto del minore e di un mezzo del maggiore è pari a 18. Determina i due numeri incogniti.

11.

Le donne di una biblioteca sono il triplo degli uomini. Calcola quanti sono gli uomini sapendo che, se ci fossero 20 donne in meno, queste sarebbero la metà degli uomini.

12.

Giampaolo spende al ristorante i 2/3 di quanto pagato per il piatto di pesce. Sapendo che la spesa totale è di 57,50 euro, quanto è costato il piatto di pesce?

13.

La somma di due numeri è 40. Se al secondo si aggiunge 2 si ottiene il doppio del primo.

14.

Un numero è uguale al suo doppio diminuito di 1.

15.

Un numero è tale che addizionato al suo successivo è uguale al suo triplo diminuito di 2.

16.

Calcola i tre numeri dispari, uno successivo dell'altro, che sommati danno 51.

17.

La somma di due numeri è 20 e la loro differenza è 4. Trova i due numeri.

18.

La somma di due numeri è 98 e la loro differenza è 22. Trova i due numeri.