Les graphes non orientés

Un **graphe non-orienté** G est un **ensemble de sommets reliés par des arêtes**. Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**. Une arête reliant deux sommets est dite **incidente** à ces deux sommets. Une arête est une **boucle** si elle relie un sommet à lui-même. Un **sous-graphe** G' d'un graphe G est un graphe constitué de **certains sommets** de G et des arêtes qui relient ces sommets. L'**ordre d'un graphe** est le nombre total de ses sommets. Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, les boucles comptant pour deux. Un graphe est dit **simple** si au plus une seule arête relie deux sommets et s'il n'y a aucune boucle sur les sommets.

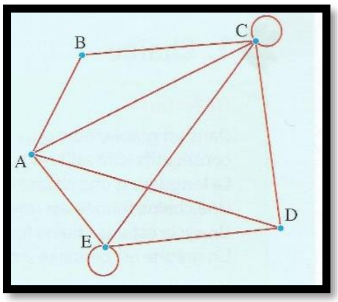
Dans un graphe simple non-orienté, la **somme des degrés** des sommets est égale au **double du nombre d'arêtes**. Une conséquence est que dans un graphe simple non-orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Un graphe non-orienté est **complet** si tous ses sommets sont **adjacents**.

Application directe

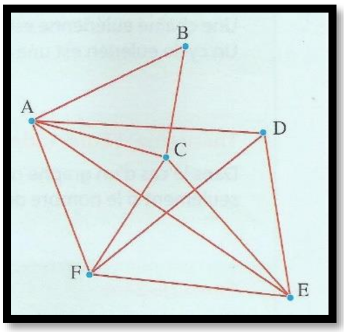
Situation 1

On considère le graphe G ci-contre. Quel est l'ordre du graphe ? Ce graphe est-il simple ? Quel est le degré de chaque sommet ? Combien vaut la somme des degrés des sommets de ce graphe ? Pouvez-vous en déduire le nombre d'arêtes du graphe ? Les sommets B et D sont-ils adjacents ? Dessiner le sous-graphe ADE. Quel est son ordre et combien possède-t-il d'arêtes ?



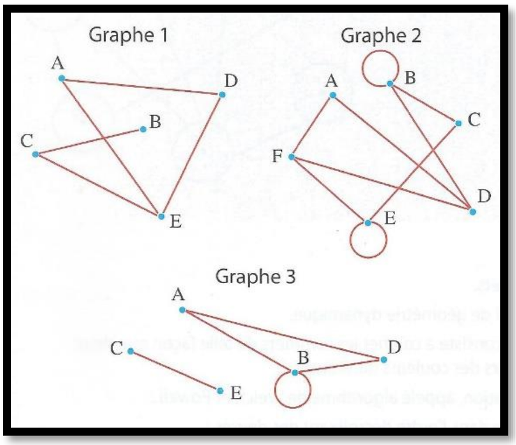
Situation 2

On considère le graphe G représenté ci-contre. Quel est l'ordre de ce graphe ? Le graphe est-il simple ? Le graphe est-il complet ? Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 4. Quel est le degré de chacun de ses sommets ? Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Quel est le degré de chacun des sommets ?



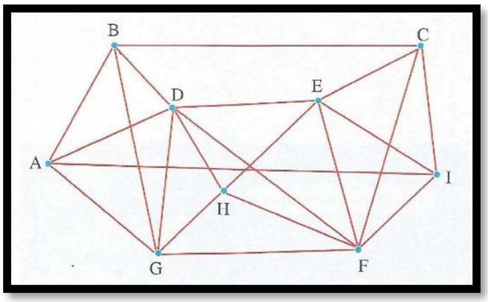
Situation 3

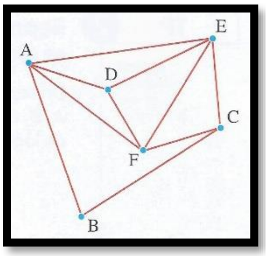
On considère les trois graphes représentés ci-contre. Pour chaque graphe répondre aux questions suivantes. Quel est l'ordre du graphe ? Quel est le degré de chacun des sommets ? Quel est le nombre d'arêtes ? Les sommets A et E sont-ils adjacents ?



Situation 4

On considère le graphe ci-dessous à gauche. Quel est l'ordre du graphe ? Quel est le degré de chacun de ses sommets ? On considère le graphe ci-dessous à droite. Quel est l'ordre de ce graphe ? Est-il complet ? Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 2, un sous-graphe complet d'ordre 3, un sous-graphe complet d'ordre 4.





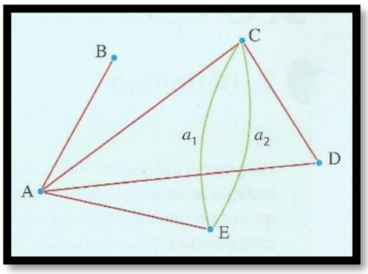
Parcourir un graphe non-orienté

Dans un graphe non-orienté, on appelle **chaîne** une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont adjacents. La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui composent la chaine. Une **chaîne fermée** est une chaîne dont le premier et le dernier sommet sont confondus. Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes. Un graphe est **connexe** si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une et une seule fois. Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée. Dans le cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Les conséquences sont les suivantes : un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair, si le graphe connexe a deux sommets de degré impair alors ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne, un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

Application directe

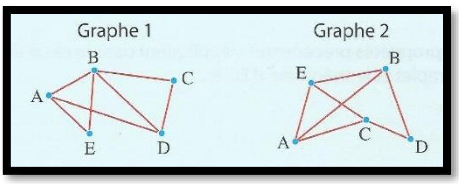
Situation 1

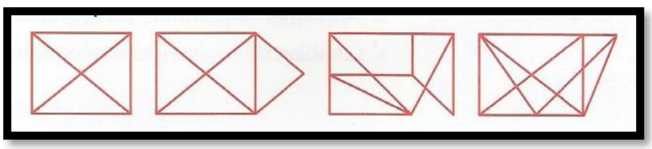


On considère le graphe ci-contre. Le graphe est-il connexe ? Le graphe est-il simple ? On considère la chaine BACa2EAB. Quelle est sa longueur ? Est-ce une chaine fermée ? Un cycle ?

Situation 2

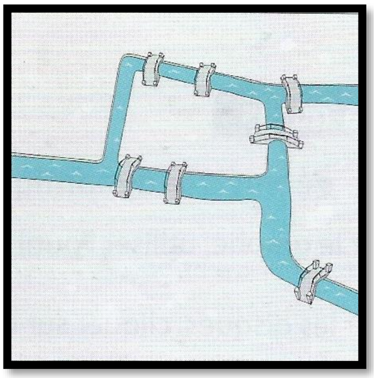
Est-il possible de tracer les figures proposées ci-dessous sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ? Justifier.





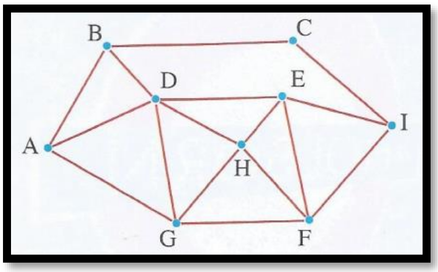
Situation 3

La ville de Königsberg est construite autour de deux iles reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou à l'autre des deux iles, comme représenté sur le plan proposé ci-dessous. Est-il possible de se promener dans les rues de Königsberg en passant une et une seule fois par chaque pont ?



Situation 4

Le graphe ci-contre représente le plan simplifié du centre d'une ville. Les arêtes représentent les rues et les sommets représentent les carrefours. Un promeneur circule à pied dans le centre-ville et souhaite parcourir toutes les rues sans passer deux fois par la même rue Est-ce possible ? Montrer qu'il peut réaliser son souhait s'il accepte de ne pas parcourir une rue, laquelle ?



Graphes orientés et matrice d'adjacence

Un graphe est orienté lorsque ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité. Une flèche indique le sens dans lequel l'arête peut être parcourue. Dans ce cas, les arêtes sont aussi appelés arcs et on parle de degré entrant d'un sommet pour le nombre d'arcs dirigés vers le sommet et de degré sortant pour le nombre d'arcs partant du sommet.

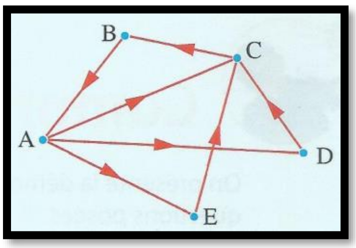
La matrice associée à un graphe (orienté ou non) d'ordre n est la matrice de taille n où le terme de la « i-ème » ligne et de la « j-ème » colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets « i » et « j ». Cette matrice est appelée la **matrice d'adjacence** du graphe. Remarque : la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique car le nombre d'arêtes reliant le sommet « i » au sommet « j » est le même que celui reliant le sommet « j » au sommet « i ».

On considère un graphe d'ordre n et on note M sa matrice d'adjacence. Le **nombre de chemins** de longueur p reliant deux sommets « i » et « j » est donné par le terme de la « i-ème » ligne et de la « j-ème » colonne de la matrice M^p.

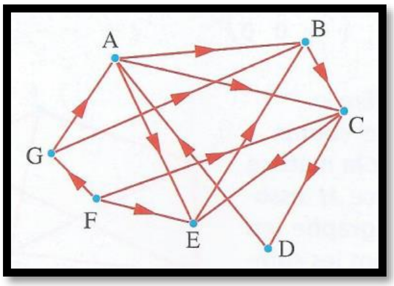
Application directe

Situation 1

Quel est l'ordre du graphe ? Quel est le degré entrant du sommet C ? Quel est le degré sortant du sommet B ? Déterminer une chaine de longueur 2 reliant les sommets A et C.



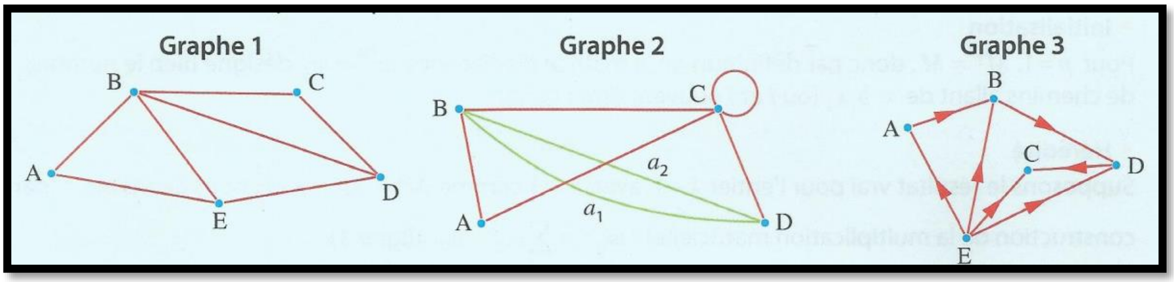
<u>Situation 2</u>



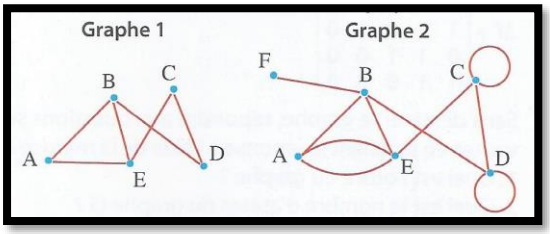
Quel est l'ordre du graphe ? Quel est le degré entrant du sommet A ? Quel est le degré sortant du sommet B ? Déterminer une chaine de longueur 3 reliant les sommets A et E.

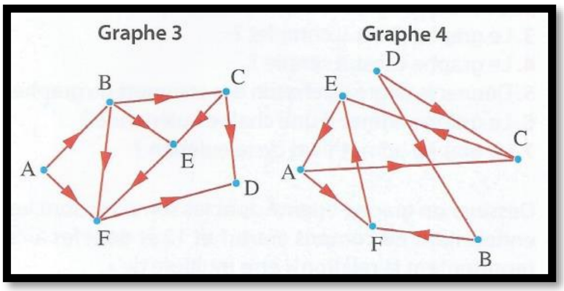
<u>Situation 3</u>

Dans chacun des cas, déterminer la matrice d'adjacence associée au graphe (en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique). Pour le graphe 1 on souhaite déterminer les chaines de longueur 3 reliant les sommets A et E : déterminer le nombre de chaines puis lister les.

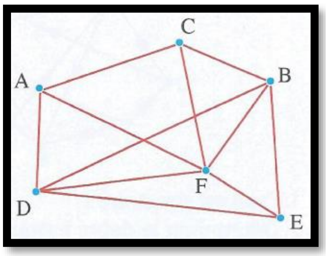


Déterminer la matrice d'adjacence des graphes.





<u>Situation 4</u>



Donner la matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre (en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique). En déduire le nombre de chaines de longueur 5 reliant les sommets A et E.

<u>Situation 5</u>

Pour chaque graphe proposé ci-contre, donner la matrice d'adjacence associée. Dans le graphe de gauche combien y a-t-il de chaines de longueur 6 reliant D à B ? Dans le graphe de droite, combien y a-t-il de chaines de longueur 10 reliant E à F ?