Exercice 1

Dans cet exercice on considère la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} T_0 = 180 \\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9 \end{cases}$$

Partie A

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geq 20$.

2. Vérifier que $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

3. Que peut-on en déduire pour le comportement asymptotique de cette suite ?

Partie B

4. On considère la suite auxiliaire définie par $u_n = T_n - 20$. Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

5. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

6. Calculer la limite de la suite (T_n).

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four la température du gâteau est de 180°C et que celle de l'air ambiant est de 20°C. La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température du gâteau par la suite (T_n) étudiée dans les parties A et B. Plus précisément, T_n représente la température, exprimée en °C, n minutes après sa sortie du four.

On considère la fonction Python proposée ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

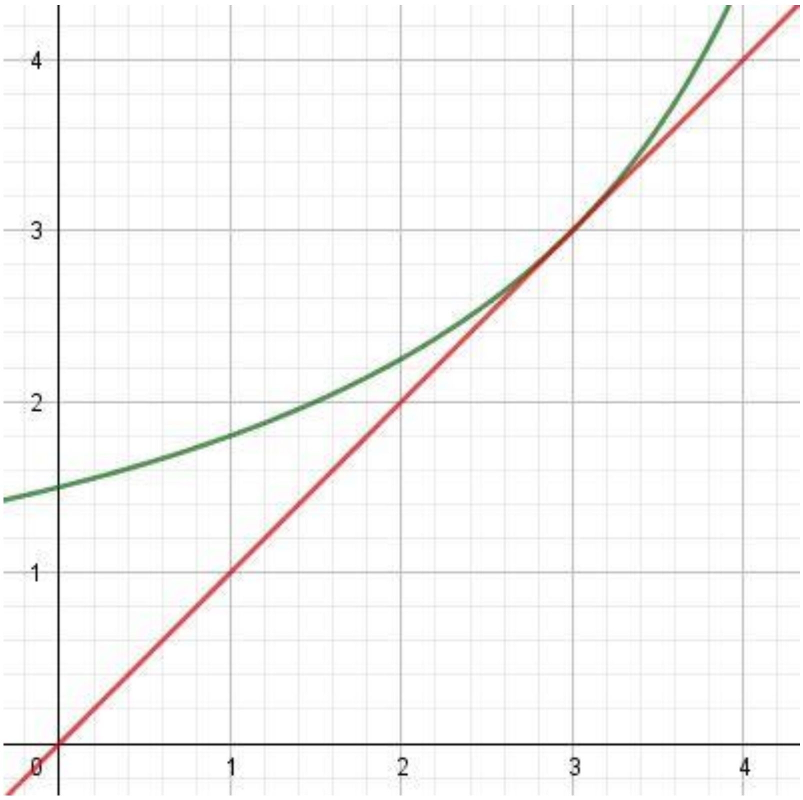
7. Quel est le résultat obtenu en exécutant la commande $\text{temp}(125)$?

8. Interpréter succinctement ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de $g(x)=\dfrac{9}{6-x}$ et la droite d'équation $y=x$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) définie par : $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$.



1. Représenter sur l'axe des abscisses de ce repère les trois premiers termes de la suite.

Sans l'expression du terme général

2. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $0<u_n<3$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$.

4. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Expliquer pourquoi. La suite (u_n) est-elle convergente ? Expliquer pourquoi. Quelle est sa limite ? Expliquer comment l'obtenir.

Avec l'expression du terme général

5. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Déterminer l'expression de son terme général.

6. En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3

Dans cet exercice on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}.$$

Partie A

1. Compléter les lignes 3 et 6 du script Python proposé ci-dessous pour que la fonction « $\text{liste}(k)$ » prenne, en entrée, un entier naturel k et renvoie, en sortie, la liste des premiers termes de la suite de u_0 jusqu'à u_k.

```
1.  def liste(k) :
2.      L = []
3.      u = ...
4.      for i in range(0, k+1) :
5.          L.append(u)
6.          u = ...
7.      return(L)
```

Partie B

2. Calculer « à la main » les premiers termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n).
   Vous donnerez la réponse sous la forme de trois fractions irréductibles.

3. Conjecturer, à partir des résultats obtenus pour le calcul de ces premiers termes, l'expression du terme général donnant u_n en fonction de n.

4. Démontrer, en vous appuyant sur un raisonnement par récurrence, la validité, pour tout entier naturel n, de la conjecture précédente.

5. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

Un groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement d'une population de grenouilles autour d'un étang. Ce taux dépend notamment de la quantité de nourriture à disposition et de la qualité de l'environnement. Une étude menée en 2020 par ce groupe a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ce qui signifie que 90% des ressources nécessaires étaient disponibles. On modélise ce taux par la suite (T_n) définie par $T_{n+1} - T_n = -0{,}1 \times T_n^{\,2}$ où n est le nombre d'années écoulées depuis 2020. Certains spécialistes estiment qu'en 2025 le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,6. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Justifier.

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 0{,}1 \times x^2$. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$. La suite est-elle convergente ? Justifier. Le groupe de spécialistes affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources va passer à un niveau inférieur à 40% dans les prochaines années. Sauriez-vous expliquer pourquoi et préciser à partir de quelle année ceci se produira ?

Exercice 5

La suite (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+4} \times u_n$. La suite (v_n) est la suite définie par $v_n = (n+1)u_n$. La feuille de calcul présente les valeurs des premiers termes des deux suites.

Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ? Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on saisir dans la cellule C3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de la suite (v_n) ?

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	1	1
3	1	0,25	0,5
4	2	0,083333	0,25
5	3	0,03125	0,125
6	4	0,0125	0,0625
7	5	0,005208	0,03125
8	6	0,002232	0,015625
9	7	0,000977	0,007813
10	8	0,000434	0,003906
11	9	0,000195	0,001953

Conjecturer à partir des valeurs obtenues l'expression du terme général de la suite (v_n).

Valider ou corriger votre conjecture à l'aide d'une démonstration. En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n). Déterminer sa limite.

Exercice 6

La suite (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et $u_{n+2} = \dfrac{5}{4} \times u_{n+1} - \dfrac{1}{4} \times u_n$. On souhaite dans un premier temps calculer les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B4 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ? Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite (u_n) ?

	A	B
1	n	Un
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_n - 7$. Démontrer que la suite (v_n) est constante. En déduire que $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4}$.

Démontrer par récurrence que $u_n < u_{n+1} < 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser son premier terme et la raison. En déduire que $u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite de la suite (u_n).