Exercice 1

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- Soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S »,
- Soit malade (atteint par le virus),
- Soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le modèle de propagation est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés,
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés,
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

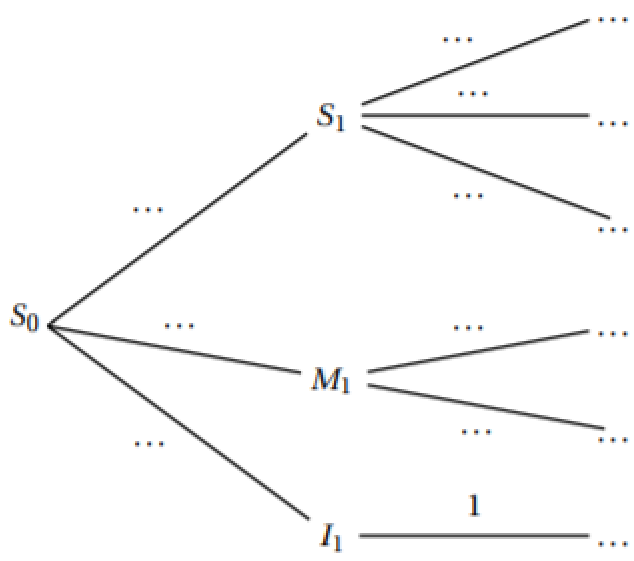
- S_n : « l'individu est de type S en semaine n »,
- M_n : « l'individu est malade en semaine n »,
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes : $p(S_0)=1$, $p(M_0)=0$ et $p(I_0)=0$.

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-contre.
2. Montrer que $p(I_2)=0,2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?



Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = p(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = p(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Expliquer succinctement pourquoi $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet pour la suite de l'exercice que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient les relations de récurrence suivantes : $u_{n+1} = 0,85u_n$, $v_{n+1} = 0,05u_n + 0,65v_n$ et $w_{n+1} = 0,10u_n + 0,35v_n + w_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Quelle formule, saisie dans la case B3 permet par « recopie vers le bas » d'obtenir les termes de la suite (u_n) ? Quelle formule, saisie dans la case C3 permet par « recopie vers le bas » d'obtenir les termes de la suite (v_n) ? Quelle formule, saisie dans la case D3 permet par « recopie vers le bas » d'obtenir les termes de la suite (w_n) ?

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
…	…	…	…	…
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

3. On observe que les termes de la suite (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : il s'agit de l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Lire dans le tableur la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5. Montrer par récurrence que $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. En déduire (à l'aide des questions 1, 4 et 5) l'expression de w_n en fonction de n.

7. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

8. Que peut-on en déduire pour l'évolution de l'épidémie à long terme prévue par ce modèle ?

Exercice 2

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

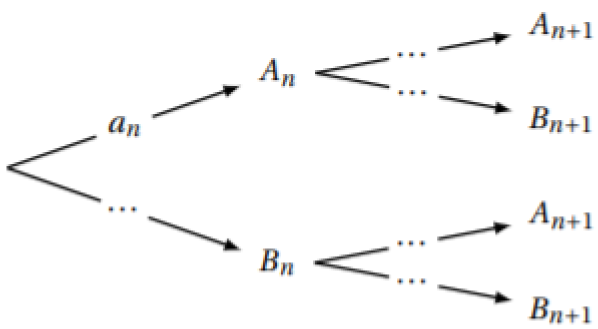
- Si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8.
- Si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier $n \geq 1$, on note A_n et B_n les évènements suivants : A_n : « la n-ième partie est une partie de type A », B_n : « la n-ième partie est une partie de type B ».

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré proposé ci-contre.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel compris entre 0 et 1.

La suite (a_n) est donc définie par : $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3 \end{cases}$ et on considère la suite auxiliaire (u_n) définie par $u_n = a_n - 0,6$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont vous proposerez le premier terme (exprimé en fonction de a) et la raison. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

On propose ci-contre l'extrait d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur qui calcule les valeurs des premiers termes.

On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - n$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

Quelle formule doit-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ? Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n) et son comportement asymptotique.