**Exercice 1** *Dans cet exercice les 2 parties sont indépendantes*

Partie A

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$. Soit la suite auxiliaire $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - n - 1$.

On considère ci-contre les cellules d'un tableur permettant d'observer les premiers termes de chacune de ces suites.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | Un | Vn |
| 2 | 0 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 12 | 10 |
| 4 | 2 | 53 | 50 |
| 5 | 3 | 254 | 250 |
| 6 | 4 | 1255 | 1250 |
| 7 | 5 | 6256 | 6250 |
| 8 | 6 | 31257 | 31250 |
| 9 | 7 | 156258 | 156250 |
| 10 | 8 | 781259 | 781250 |
| 11 | 9 | 3906260 | 3906250 |
| 12 | 10 | 19531261 | 19531250 |

1. Quelle formule a-t-on inséré dans la case B3 puis étiré vers le bas pour obtenir les termes de $(u_n)$ ?
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n+1$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
3. Quelle formule a-t-on inséré dans la case C2 puis étiré vers le bas pour obtenir les termes de $(v_n)$ ? Conjecturer puis démontrer la nature de la suite $(v_n)$ : est-elle arithmétique, est-elle géométrique, quel est son premier terme, quelle est sa raison ?
4. En déduire l'expression du terme général de la suite $(v_n)$ puis celle de la suite $(u_n)$.

Partie B

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$. Soit la suite auxiliaire $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

On considère ci-contre les cellules d'un tableur permettant d'observer les premiers termes de chacune de ces suites.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | Un | Vn |
| 2 | 0 | 0 | 0,5 |
| 3 | 1 | -1,33333 | 1,5 |
| 4 | 2 | -1,6 | 2,5 |
| 5 | 3 | -1,71429 | 3,5 |
| 6 | 4 | -1,77778 | 4,5 |
| 7 | 5 | -1,81818 | 5,5 |
| 8 | 6 | -1,84615 | 6,5 |
| 9 | 7 | -1,86667 | 7,5 |
| 10 | 8 | -1,88235 | 8,5 |
| 11 | 9 | -1,89474 | 9,5 |
| 12 | 10 | -1,90476 | 10,5 |

5. Quelle formule a-t-on inséré dans la case B3 puis étiré vers le bas pour obtenir les termes de $(u_n)$ ? A l'aide du tableau, conjecturer la limite de $(u_n)$.
6. Quelle formule a-t-on inséré dans la case C2 puis étiré vers le bas pour obtenir les termes de $(v_n)$ ? Conjecturer puis démontrer la nature de la suite $(v_n)$ : est-elle arithmétique, est-elle géométrique, quel est son premier terme, quelle est sa raison ?
7. En déduire l'expression du terme général de la suite $(v_n)$ puis celle de la suite $(u_n)$.
8. Confirmer, par un calcul de limite que vous détaillerez, la conjecture de la question 5.

**Exercice 2** *Dans cet exercice les 2 parties sont indépendantes*

Partie A

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 400$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

2. En déduire en détaillant le raisonnement que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

3. On propose ci-contre une fonction écrite en langage Python. Sauriez-vous retrouver à l'aide de votre calculatrice quelle valeur on obtient en tapant dans la console « suite(500) » ?

```
def suite(seuil) :
  n=0
  u=400
  while u<=seuil:
    u=0.9*u+60
    n=n+1
  return n
```

4. Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres. Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres. Le verger compte 400 arbres en 2023. L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir. Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Quand ? Pourquoi ?

Partie B

Marie Sklodowska-Curie (1867−1934) est une physicienne, chimiste et mathématicienne, polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium. On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration de ses noyaux atomiques au cours du temps. On sait que 1 gramme de polonium contient $3\times10^{21}$ noyaux atomiques. Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 grammes de polonium. On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 gramme de polonium. On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 6\times10^{21}$ et $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5\times10^{19}$.

5. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.

6. En déduire en détaillant le raisonnement que la suite $(v_n)$ est convergente et préciser sa limite.

7. Une personne affirme que « c'est au bout de 139 jours le nombre de noyaux de polonium aura diminué de 25% ». Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il permette de trouver ce résultat.

```
def suite(seuil) :
  n= ...
  v= ...
  while ... :
    v= ...
    n= ...
  return n
```

8. Que faudra-t-il taper dans la console pour l'obtenir ?

## Exercice 3

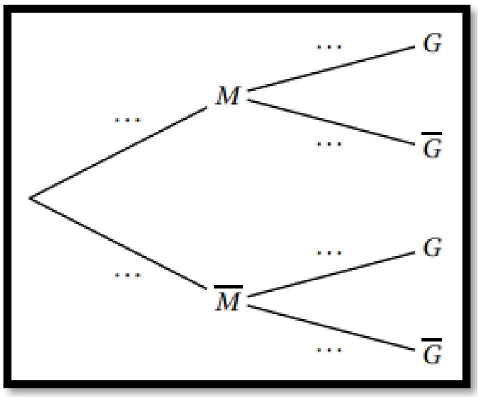
Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte. Une étude statistique a montré que :

- 70% des clients de l'hôtel visitent le musée,
- parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte,
- 6% des clients de l'hôtel ne font aucune visite.

On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- $M$ l'évènement : « le client visite le musée »,
- $G$ l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'événement contraire de l'événement $M$ et $\overline{G}$ l'événement contraire de l'événement $G$. Ainsi d'après les données statistiques de l'énoncé on a $p(M)=0,7$, $p_M(G)=0,6$ et $p(\overline{M}\cap\overline{G})=0,06$.




Partie A

1. Après avoir déterminé la probabilité conditionnelle $p_{\overline{M}}(\overline{G})$, recopier et compléter l'arbre proposé ci-dessus en indiquant sur chaque branche de l'arbre la probabilité associée.

2. Calculer la probabilité $p(G)$ qu'un client de l'hôtel visite la grotte. Justifier la réponse.

3. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier la réponse.

Partie B

On considère dans cette partie la variable aléatoire $T$ qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ses visites. Les tarifs sont les suivants : la visite du musée coute 12€, la visite de la grotte coute 5€, la visite du musée et de la grotte correspond à la somme des deux tarifs.

4. Donner la loi de probabilité de $T$. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau. Calculer l'espérance la variable aléatoire et donner une interprétation de la valeur obtenue.

5. A partir de combien de clients le responsable peut-il espérer avoir une recette de 1000€ ?

6. Sans modifier le prix de visite du musée, quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin que, sur une base de 100 clients présents, la recette espérée puisse atteindre 1500€ ?

Partie C

Dans cette partie, on choisit au hasard 100 clients de cet hôtel (en assimilant ce choix à un tirage avec remise). Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour ? On donnera une valeur du résultat approchée au millième.

**Exercice 4** *Dans cet exercice les 3 parties sont indépendantes*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est attendue.

Partie A

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-contre.

| | Aviron | Basket | Total |
|---|---|---|---|
| **Filles** | 25 | 80 | 105 |
| **Garçons** | 50 | 45 | 95 |
| **Total** | 75 | 125 | 200 |

On choisit un adhérent au hasard et on considère les deux évènements suivants : $F$ l'événement « l'adhérent est une fille », $A$ l'événement « l'adhérent pratique l'aviron ».

1. La probabilité de $F$ sachant $A$ est égale à :

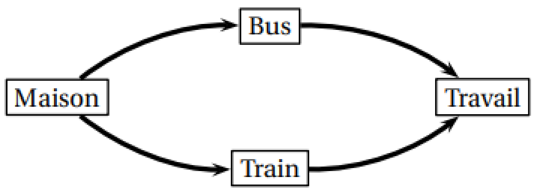
   **a.** $\dfrac{25}{100}$ **b.** $\dfrac{25}{75}$ **c.** $\dfrac{25}{105}$ **d.** $\dfrac{75}{105}$

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

   **a.** $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{1}{8}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{5}{36}$

Partie B

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train. La probabilité que le bus soit en panne est égale à $b$. La probabilité que le train soit en panne est égale à $t$. Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.




3. La probabilité $p_1$ que le bus ou le train soient en panne est égale à :

   **a.** $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

4. La probabilité $p_2$ que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

   **a.** $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$

Partie C

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4% des pièces produites sont défectueuses. On choisit au hasard $n$ pièces produites sur cette chaîne.

5. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse dans l'échantillon choisi ?

   **a.** $0{,}04^n$ **b.** $0{,}96^n$ **c.** $1 - 0{,}04^n$ **d.** $1 - 0{,}96^n$

6. On considère la fonction Python proposée ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?
   **a.** Le plus petit nombre $n$ tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.
   **b.** Le plus petit nombre $n$ tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.
   **c.** Le plus grand nombre $n$ tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.
   **d.** Le plus grand nombre $n$ tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

```
def seuil (x) :
    n=1
    while 1-0.96**n < x :
        n = n + 1
    return n
```

## Exercice 5

On s'intéresse au développement d'une bactérie. On modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille. Pour tout entier naturel $n$, on appelle $p_n$ la probabilité d'obtenir au plus $n$ descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite $(p_n)$ est définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} p_0 = 0,3 \\ p_{n+1} = 0,3 + 0,7\,p_n^{\ 2} \end{cases}$$

La feuille de calcul proposée ci-contre donne des valeurs approchées de la suite des premiers termes de la suite $(p_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $p_n$ |
| 2 | 0 | 0,3 |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | 0,407 695 62 |
| 6 | 4 | 0,416 351 |
| 7 | 5 | 0,421 343 71 |
| 8 | 6 | 0,424 271 37 |
| 9 | 7 | 0,426 004 33 |
| 10 | 8 | 0,427 035 78 |
| 11 | 9 | 0,427 651 69 |
| 12 | 10 | 0,428 020 18 |
| 13 | 11 | 0,428 240 89 |
| 14 | 12 | 0,428 373 18 |
| 15 | 13 | 0,428 452 51 |
| 16 | 14 | 0,428 500 09 |
| 17 | 15 | 0,428 528 63 |
| 18 | 16 | 0,428 545 75 |
| 19 | 17 | 0,428 556 02 |

1. Déterminer les valeurs de $p_1$ et $p_2$ (valeurs masquées dans la feuille de calcul). Arrondir la valeur de $p_2$ à $10^{-3}$ près.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 11 descendances à partir d'une bactérie de ce type ? Arrondir le résultat obtenu à $10^{-3}$ près.

3. Formuler deux conjectures respectivement sur le sens de variation et sur la convergence de la suite $(p_n)$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $0 \le p_n \le p_{n+1} \le 0,5$.
   En déduire que la suite $(p_n)$ est convergente.

5. On appelle L la limite de la suite $(p_n)$. Montrer que L est solution de l'équation du second degré $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$, résoudre cette équation et proposer la valeur de la limite L.

6. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les $n$ premiers termes de la suite $(p_n)$. Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de telle sorte que la fonction « $\text{suite}(n)$ » retourne, sous forme de liste, les $n$ premiers termes de la suite.

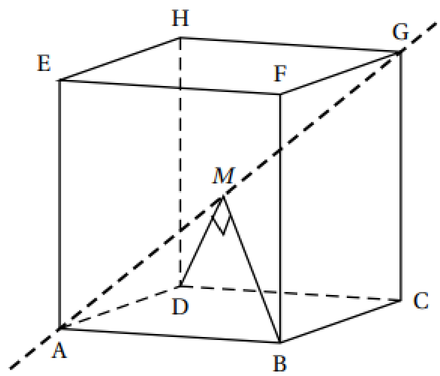
```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

## Exercice 6

On considère ci-dessous ABCDEFGH un cube de coté 1. M est un point du segment [AG]. Etant donné l'alignement des points A, M et G, il existe un réel $x \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AG}$.

### Partie A

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on s'intéresse à la position du point M sur le segment [AG] pour laquelle l'angle $DMB$ est un angle droit




1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM}$ et celles du vecteur $\overrightarrow{BM}$. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BM}$ en fonction de $x$.

2. En déduire les valeurs de $x$ pour lesquelles l'angle $DMB$ est un angle droit.
   Quelles sont les coordonnées des deux points M correspondants ?

3. Lorsque $x = 1$, quelle est la position du point M et quelle est la mesure de l'angle $DMB$ ?

### Partie B

On se place toujours dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on s'intéresse à la position du point M sur le segment [AG] pour laquelle la distance CM est minimale. On pose $f(x) = CM^2$.

4. Déterminer, en fonction de $x$, l'expression algébrique $f(x)$.

5. Pour quelle valeur de $x$ la fonction $f(x)$ est-elle minimale ?
   En déduire les coordonnées de M qui minimisent la distance CM.
   Sauriez-vous en déduire une mesure de l'angle $DMB$ et de l'angle $CMA$ correspondant ?

## Exercice 7

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 \end{cases}$.

Le but de cet exercice est de déterminer dans un premier temps le comportement asymptotique (c'est-à-dire sa limite lorsque $n$ devient grand) puis, dans un deuxième temps, la forme explicite de cette suite (c'est-à-dire l'expression du terme $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Calculer en faisant apparaitre les détails des calculs effectués les termes $u_1$ et $u_2$.

2. Recopier et compléter le script proposé ci-contre en langage Python afin que pour tout $n$ entier naturel il retourne la valeur de $u_n$.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(  n  ) :
    |    u= ...
    return u
```

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n - 1$.

4. En déduire, en détaillant le raisonnement, la limite de la suite $(u_n)$.

On considère la suite auxiliaire $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - 2n + 1$ et on saisit dans la console le script proposé ci-contre en langage Python.

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L

      >>> suite_v(5)
      [1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

5. En observant la liste de nombres obtenus ci-contre, conjecturer la nature de la suite auxiliaire $(v_n)$, préciser sa raison et son premier terme.

6. Démontrer, en détaillant le raisonnement, la conjecture énoncée à la question précédente. En déduire la forme explicite de la suite auxiliaire $(v_n)$, puis celle de la suite $(u_n)$.

## Exercice 8

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1,75 |
| 4 | 2 | 2,562 5 |
| 5 | 3 | 3,421 875 |
| 6 | 4 | 4,316 406 25 |

On désigne par $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - n$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.

2. En déduire l'expression du terme général de $(u_n)$ et son comportement asymptotique.