Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le point $S(1;-2;0)$ et le plan (P) d'équation $x+y-3z+4=0$. Pour chacune des questions proposées ci-dessous, choisir la bonne réponse en justifiant méthodiquement la réponse choisie :

1. Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par S et perpendiculaire au plan (P) est :

$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=-3t \end{cases}$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite (D) avec le plan (P) sont :

$H(-4;0;0)$	$H\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$	$H\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$	$H\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point S au plan (P) est égale à :

$\frac{\sqrt{11}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{11}$

4. Soit (Γ) la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère (Γ) et du plan (P) est :

Le point $I(1;-5;0)$	Le cercle de centre H et de rayon $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$	Le cercle de centre S et de rayon 2	Le cercle de centre H et de rayon $\frac{3\sqrt{10}}{11}$

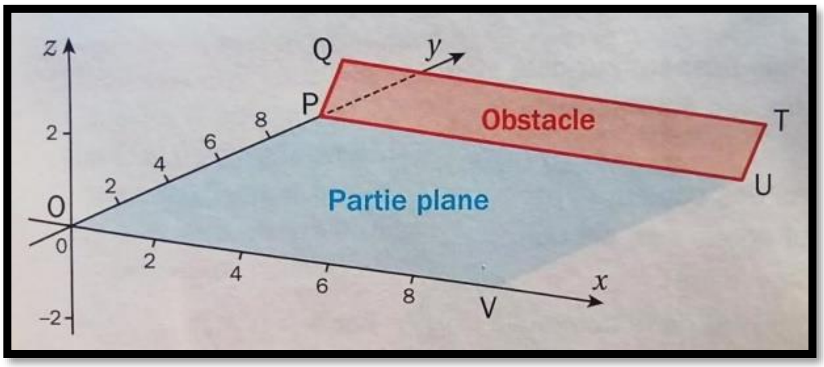
5. Soit (Σ) la sphère de centre S et de rayon $\sqrt{11}$. L'intersection de la sphère (Σ) et de la droite (D) :

Les points de coordonnées $(2;-1;-3)$ et $(0;-3;9)$	Les points de coordonnées $(0;-3;3)$ et $(2;-1;-3)$	Les points de coordonnées $(2;-1;1)$ et $(0;-3;7)$	Le point O et le point H.

<u>Informations :</u> la sphère de l'espace de centre $C(x_C;y_C;z_C)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $CM=R$. Pour établir son équation il suffit d'écrire $CM^2=R^2$ c'est-à-dire $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=R^2$, équation que l'on peut éventuellement développer.

Exercice 2

Alex et Elisa pilotent deux drones sur un terrain constitué d'une partie plane bordée par un obstacle. On considère un repère orthonormé dans lequel **une unité correspond à dix mètres**. Pour modéliser le relief de la zone on définit six points : $O(0;0;0)$, $P(0;10;0)$, $Q(0;11;1)$, $T(10;11;1)$, $U(10;10;0)$ et $V(10;0;0)$. La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle est délimité par le rectangle PQTU comme l'indique la figure proposée ci-dessous.



Le drone d'Alex suit une trajectoire rectiligne portée par la droite (AB) avec $A(2;4;0,25)$ et $B(2;6;0,75)$. Le drone d'Elisa suit une trajectoire rectiligne portée par la droite (CD) avec $C(4;6;0,25)$ et $D(2;6;0,25)$.

Etude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0;1;-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU). En déduire une équation cartésienne de ce plan.
3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants en un point I dont on précisera les coordonnées. Le drone d'Alex rencontre-t-il l'obstacle ? Expliquer pourquoi.

Distance minimale entre les deux trajectoires

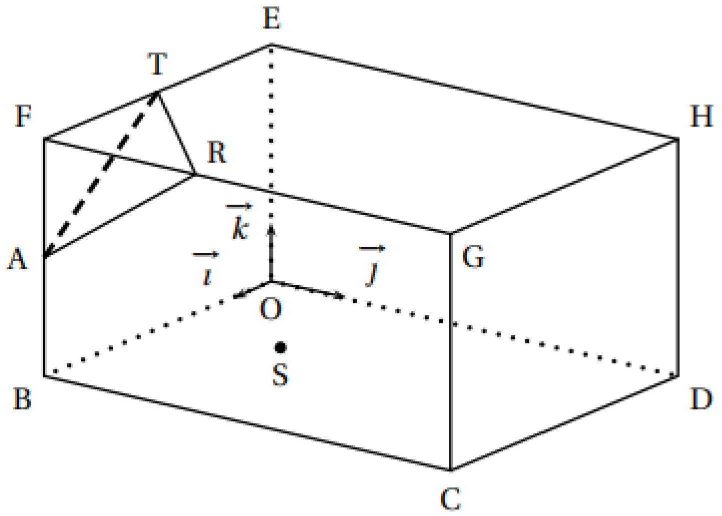
Pour éviter toute collision entre les deux appareils, Alex et Elisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires des deux drones. Pour vérifier si cette consigne est respectée, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD). Il existe donc deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$. On admet que les deux droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires et que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est à la fois perpendiculaire à la droite (AB) et à la droite (CD).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de a et de b.
2. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la distance est minimale.
3. En déduire la distance minimale entre les trajectoires des deux drones et conclure…

Exercice 3

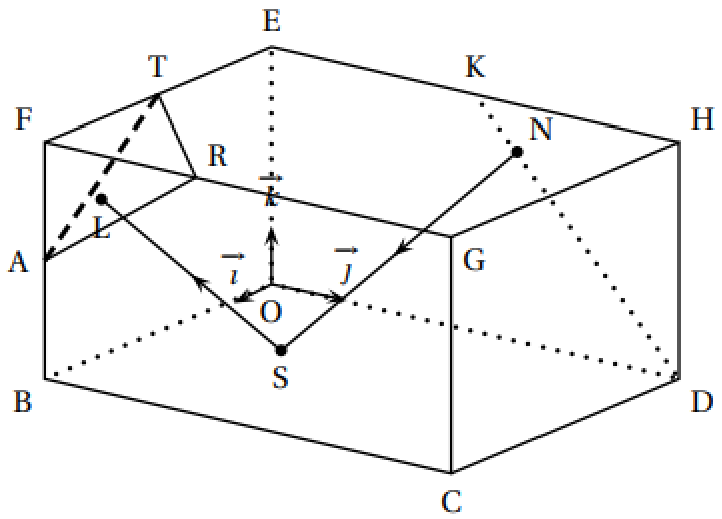
Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.

On se place dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{j}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier $C(6;8;0)$, $F(6;0;4)$ et $G(6;8;4)$. Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6;0;2)$, $R(6;3;4)$ et $T(3;0;4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $S\left(3;\frac{5}{2};0\right)$.

1. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AT}$.
   En déduire une valeur approchée au dixième de degré près de la mesure de l'angle $\widehat{RAT}$.
3. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
4. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
5. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART). Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S, donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
6. Déterminer les coordonnées de L, point d'intersection entre Δ et le plan (ART).



L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] où le point K est le milieu du segment [EH]. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S comme l'indique la figure ci-dessous.

7. Donner une représentation paramétrique de la droite (DK).

8. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Exercice 4

On considère la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ passant par le point $A(2;1;-1)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une représentation paramétrique de la droite (d) ?

$\begin{cases} x = 2+t \\ x = 1-t \\ z = -1+2t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1+2t \\ x = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -2+t \\ x = -1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2-t \\ x = 1+t \\ z = -1-2t \end{cases}$

On considère la sphère (S) de centre $O(3;-1;1)$ et de rayon $R=3$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est une équation cartésienne de la sphère (S) ?

$x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+2=0$	$2x^2+y^2+z^2-3x-2y-2z+2=0$
$x^2+y^2+z^2+2y-z-8=0$	$x^2+z^2-6x+5y-4z+2=0$

Déterminer s'il(s) existe(nt), le (ou les) point(s) d'intersection entre la sphère (S) et la droite (d).

$M_1\ :\ (2;1;-1)$ $M_2\ :\ (\frac{13}{3};\frac{-4}{3};\frac{11}{3})$	$M_1\ :\ (0;0;0)$ $M_2\ :\ (-3;2;1)$	$M\ :\ (2;1;-1)$	La sphère S et la droite d n'ont pas de point d'intersection.